目录
CONTENTS

绪　　论

MARKOV PROCESSES WITH TWO PARAMETERS

在自然界和人类社会中，普遍地存在着两类客观现象：必然现象和随机现象．必然现象是在一定条件下必然会发生的客观现象，其结果能预先确定．例如，在标准大气压下，纯水加热到 100℃ 必然沸腾；在恒力作用下，质点作等加速运动．而随机现象是这样的客观现象，在一定的条件下，人们不能预先确定出现的结果，只能说出现多种可能结果中的一种．例如，某公路桥每天通过的汽车数目，它是非负整数集中的一个数；在相同工艺条件下生产出来的灯泡的使用寿命，它是非负实数集中的一个数．虽然，单个的随机现象其结果具有一定的偶然性，但大量的随机现象却蕴含着必然的客观规律．例如，掷一枚均匀的硬币，在一次投掷中，人们不能事先确定必然出现正面，但随着投掷次数的增加，人们会发现，出现正面的频率（出现正面的次数与总投掷次数之比）逐渐稳定于$\frac{1}{2}$．概率论就是研究随机现象数量规律的数学分支，其任务在于从数量上揭示大量可重复的随机现象中的必然规律．

概率论有着悠久的历史，但遗憾的是，它的起源却与赌博有关．早在 16 世纪，意大利的一些学者就开始研究掷骰子等赌博中

的一些问题. 17 世纪中叶，法国一些数学家研究一些较复杂的赌博问题，如著名的“得分问题”、“输光问题”等. 1713 年，在瑞典数学家雅各布第一·伯努利的遗著中，首次出现了概率论中的极限定理，即通常概率论教材中的伯努利大数定律. 1716 年，A. 棣美弗得到了历史上最初的中心极限定理，后来为 P·S. 拉普拉斯推广，这就是通常概率论教材中著名的棣美弗-拉普拉斯中心极限定理. 1920 年，G. 波伊亚把独立随机变量部分和的分布渐近于正态分布的一类定理，称为中心极限定理. 极限定理是概率论的重要内容，也是数理统计的基石之一，其理论成果比较完善. 本世纪 30 年代，有关独立随机变量的极限理论已臻完备. 但新的极限理论问题在理论和实际中仍不断地产生. 概率论虽然起源于赌博，然而其后来的快速发展还是由于自然界和生产实践需要的推动. 中心极限定理就是从数学上严格证明：在实际中，受许多相互独立的微小的随机因素影响的现象，其总的影响可以看作服从正态分布.

由研究单个的随机变量到研究随机变量序列，是一个大的飞跃，它表明人们对随机现象的观察已经从静态转向动态，由单次或单个时刻的局部观察转向随着时间而推进的整个过程的全面观察. 由于实际问题的需要，特别是受物理学的刺激，人们开始研究随机过程. 实际上，随机变量序列就是一种离散参数的随机过程. 例如，假定进行一系列的投掷硬币，X_n 表示第 n 次投掷出现正面的数目（0 或 1），则 $\{X_n, n=1, 2, \cdots\}$ 刻划出一系列投掷的结果. 一般地，设 $T=\{0, 1, 2, \cdots\}$，对每个 $n\in T$ 有一个随机变量 X_n，$X=\{X_n, n\in T\}$ 就是一个离散参数的随机过程. 这里 T 既可以理解为次数的集合，也可以理解为单位时间的非负整数倍时刻的集合，或是作别的理解，这无关紧要. 但通常都理解 T 为时间集合. 由于时间的连续性，更由于实际的需要，需要考虑 $T=[0, \infty)$，对每个 $t\in T$，有一个刻划 t 时刻随机现象的随机变量 X_t，$X=\{X_t, t\in T\}$ 就是一个连续参数的随机过程，它是从时刻 0 开始直至无穷对随机现象的全部观察. 例如，在平面上作

布朗运动的粒子，设开始时粒子位于坐标原点，(X_t, Y_t) 表示 t 时刻粒子所在的坐标位置. $X=\{X_t, t\in T\}$，$Y=\{Y_t, t\in T\}$ 均是随机过程，它们是一维布朗运动，而 $C=\{(X_t, Y_t), t\in T\}$ 是二维随机向量过程，是二维布朗运动. X、Y 或 C 分别描述直线上或平面上的布朗粒子的运动.

对于随机过程，人们关心它的内部关系，即它的随机变量间的关系. 最简单的情形是独立随机过程，即诸随机变量是相互独立的. 但在实际中，相依的情形却更普遍. 1907 年，俄国数学家 A. A. 马尔可夫（1856—1922）提出了一类相依的随机过程，后人称之为马尔可夫过程（国内常简称为马氏过程）. 实际中常见这样的过程，其特点是：在已知它目前的状态（现在）的条件下，它未来的演变（将来）不依赖于它以往的演变（过去）. 这种在已知"现在"的条件下，"将来"与"过去"独立的特性，称为马尔可夫性（国内简称马氏性）. 具有马尔可夫性的随机过程称为马尔可夫过程. 实际问题中，许多情形都可以近似地看作马尔可夫过程. 例如，研究随着时间推移的我国人口数量，它是一个随机过程. 我国现有人口 12 亿，要预测今后的中国人口数，当然只与现在的 12 亿有关，而与过去的人口数，例如尧舜时代，商周时代，秦皇汉武时代，清代的人口数无关. 因此，我国的人口数量随机过程可以看作是一个马氏过程. 又例如，一个作布朗运动的粒子，已知它现在处的位置，今后的运动状况与粒子过去的运动状况无关，它只依赖于现在所处的位置. 因此，布朗运动也是马氏过程.

马尔可夫过程是被人们广泛研究，且理论成果最丰富的随机过程之一. 它的强大的生命力来源于理论本身的内部，来源于其它数学分支如位势理论、偏微分方程理论、复变函数论、泛函分析等，还来源于其它学科如物理学、力学、化学、生物学、甚至经济学和人文科学，更重要的是来源于生产活动、科学研究、工程技术（特别是高新技术）中大量实际问题所提出的要求. 因此，马尔可夫过程在数学其它分支、自然学科、人文学科、工程技术、生产实践中有着广泛的应用.

马氏过程的理论研究已有丰硕的成果．1931年，前苏联的数学家A．H．柯尔莫哥洛夫发表了著名的论文《概率论中的解析方法》，首先地将微分方程等分析方法用于马氏过程，奠定了马氏过程的理论基础．1951年前后，日本数学家伊藤清在法国P．莱维和前苏联的数学家C．H．伯恩斯坦等人工作的基础上，建立了随机微分方程理论，为研究马氏过程开辟了新的道路．1954年前后，美国数学家W．费勒将泛函分析中的半群方法引入马氏过程的研究中，建立了马氏过程、半群、无穷小算子之间的联系．前苏联的数学家E．B．登金通过马氏过程的轨道赋予它们以概率意义（如特征算子等）．50年代初，日本角谷静夫和美国J．L．杜布等发现布朗运动与偏微分方程论中狄利克雷问题的关系．后来，美国的G．A．亨特研究了相当一般的马氏过程（即右连左极拟左连续的强马氏过程，后人称为亨特过程）与位势的关系．目前，流形上的马氏过程、马氏随机场、无穷粒子马氏过程等，都是方兴未艾正在深入研究的课题．

在我国，马尔可夫过程得到深入的研究．50年代初，许宝騄教授在北京大学举办的概率论讨论班，开创了我国概率论研究的新局面．50年代末，从莫斯科大学留学回国在南开大学任教的王梓坤老师，将马氏过程引入我国，并带领学生们对马氏过程开展系统的研究，使马氏过程的研究在国内蓬勃开展．王梓坤教授首创极限过渡法，彻底地解决了一类特殊而重要的马氏过程即生灭过程的构造问题．由此引导我国学者对马氏过程的构造问题即Q矩阵问题（包括含瞬时状态的情形）进行深入系统的研究并取得很大的成绩．70年代末，严士健教授及其领导的集体开展了对无穷粒子马氏过程的深入和系统的研究．梁之舜教授及其领导的集体开展的对随机点过程和Delphic半群、马尔可夫振动问题的研究，均取得丰富的成果．此外，对布朗运动与位势、扩散、测度值马氏过程、马氏过程与分形及维数、马氏过程与神经网络、多参数马氏过程、马氏随机场、随机狄里克雷问题、随机微分方程的马氏解等马氏过程的理论领域亦成果累累．至于对马氏过程应

用的研究，更是欣欣向荣．在我国，已形成了一支强大的马氏过程学术队伍．

1983年和1984年，王梓坤教授相继发表了论文《二参数Ornstein-Uhlenbeck过程》和《两指标马尔可夫过程》．这两篇论文开创了我国对多参数随机过程特别是对多参数马氏过程的研究．所谓多参数随机过程，是指一族随机变量或随机向量 $X=\{X_t, t\in T\}$，其中 T 是 d 维欧氏空间 R^d 中的非负格子点集 Z_+^d 或非负点集 R_+^d．此时，T 不是全序集，是半序集，这与单参数随机过程的单参数集为全序集，是有本质区别的．单参数情形的参数集可以理解为时间集，而在多参数情形，“时间”集 T 与现实的时间大相径庭了．从理论上讲，由单参数随机过程过渡到多参数随机过程是再自然不过的了，正如研究了一元函数后必然要研究多元函数一样．然而，多参数随机过程的产生仍有它的实际背景．例如，如果我们考虑固定地点的温度，在 t 时的温度记为 X_t，则 $X=\{X_t, t\geqslant 0\}$ 是单参数随机过程．但如果我们考虑某一地区的温度，地点不是固定的，它由三个坐标（t_1，t_2，t_3）表示，连同时间 t（记为 t_4），用 X_{t_1,t_2,t_3,t_4} 表示于 t_4 时刻在地点（t_1，t_2，t_3）的温度，随机变量族 $X=\{X_{t_1,t_2,t_3,t_4}\}$ 便是四参数随机过程．多参数随机过程理论在物理、气象、水文、湍流、随机振动等方面都得到了重要的应用．

正像单参数随机过程按其内在特性可以分为马氏过程、鞅过程、平稳过程等等一样，人们试图给出多参数马氏过程、多参数鞅过程、多参数平稳过程等类过程．但由于多参数集的非全序性，人们立刻发现，多参数随机过程不是单参数随机过程的简单推广，而有着本质上的不同．例如，就马氏性而言，对于单参数集 $T=[0, \infty)$，“过去”、“现在”、“将来”非常明确，有自然的顺序．然而，对于多参数集 R_+^d，其“过去”、“现在”、“将来”就不好明确了，可以对“过去”、“现在”、“将来”作各种不同的理解，因而产生各种形式的多参数马氏性．又例如，在单参数齐次马氏过程理论中，决定马氏过程的压缩算子半群及其无穷小算子，也难以

推广到多参数马氏过程中. 因此，多参数随机过程有它自身的独特的概念、内容、方法和结果.

在多参数随机过程中，以两参数情形最具体，最有代表性，也最有启发性. 70 年代末以来，国内外许多学者已开展对多参数随机过程特别是多参数鞅的研究，对多参数马氏过程的研究还较少. 我们对多参数马氏过程特别是对两参数马氏过程进行了 10 年的集中的研究. 本书是国内外学者，特别是我国学者包括我们自己在内，对两参数马氏过程理论研究的一个小结，其中有许多结果还是首次发表的. 本书中，除第 8 章可以是更多的参数外，其余均讨论两参数情形，许多概念和结论推广到更多参数的情形并不困难.

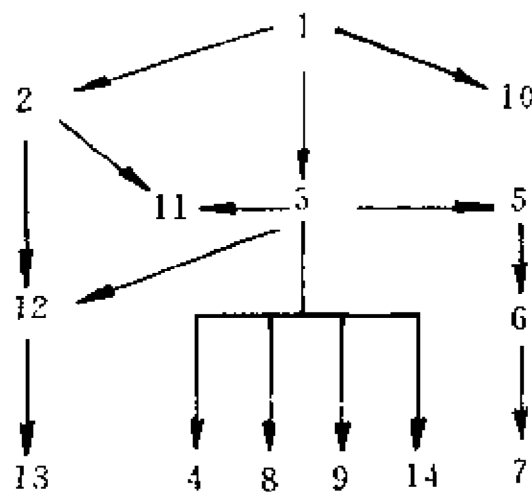
全书共 5 篇计 14 章. 第 1 篇条件独立性和两参数鞅是预备性的，它包含第 1，2 两章. 第 1 章叙述常用的记号和概念，以及本书需要的一些基础结论. 第 2 章简单地介绍了单参数鞅的某些结论，并叙述了两参数鞅过程. 第 2 篇两参数马尔可夫过程的基本理论含 3，4，5 章. 第 3 章论述各种两参数马氏性及它们之间的关系，给出了清晰而完美的关系图和反例. 特别是，以一个反例和定理纠正了外国学者关于“两参数宽过去马氏性等价于 i 马氏性，i=1，2”的结论. 第 4 章论述两参数单点马氏过程. 它实质上只反映两参数随机过程的部分特性，即过程在存在序关系的诸参数点上有在形式上类似于单参数的马氏性. 但两参数单点马氏性与单参数马氏性仍有本质差别. 这是因为两参数单点马氏性的“过去”比单参数马氏性的“过去”包含更多的内容. 第 5 章论述宽过去马氏过程的一般理论，包括过程的存在定理、强马氏性、轨道性质如有界性、灯函数性、阶梯性、连续性等等. 我们还利用了在马氏过程上生长马氏过程的方法，构造重要的两参数过程. 刻划两参数宽过去马氏过程的重要分析工具是三点转移函数族，它类似于单参数转移函数族刻划单参数马氏过程. 当状态空间可数时，单参数马氏过程必定存在转移函数族. 遗憾的是，两参数宽过去马氏过程未必存在三点转移函数族，例如即使是两参数 Pois-

son 过程也不存在三点转移函数族. 第 3 篇状态可列的两参数三点转移函数族包含第 6,7 章,主要论述三点转移函数的解析性质. 第 6 章讨论三点转移函数族的可测性、连续性、可微性、近极限、远极限等性质，建立了三点转移函数族与单参数转移函数族之间的联系，并得到三点转移函数族的表现定理. 第 7 章讨论三点转移函数族的标准性和参数对称性，并得到四个偏微分方程组即向上、向下、向左、向右偏微分方程组，它们类似于熟知的柯尔莫果洛夫向后、向前方程组. 第 4 篇几类重要的两参数马氏过程包含第 8，9，10，11，12，13 章. 第 8 章专论多参数随机游动，它是状态离散、参数离散的简单的也是最基本的多参数马氏过程. 第 9 章专论两参数独立增量过程：Levy 单，讨论了 Levy 单的表现、构造、轨道分解、样本函数及 Levy 马氏性等. 第 10 章专论两参数随机事件流，找出了这种流的表现形式. 两参数 Poisson 过程是两参数随机事件流的特殊情况. 第 11 章专论 Poisson 单和广义 Poisson 单，即两参数 Poisson 过程和两参数广义 Poisson 过程. 讨论了它们的存在定理、基本性质、鞅刻划、截口定理、跳线排列、轨道结构和性质，以及它们在射线上的导出过程等. 对于它们的轨道结构，可以说非常清晰并且是一目了然的. 前面已经提到，Poisson 单和广义 Poisson 单不存在三点转移函数族. 但这一缺点可以补救，即把 Poisson 单和广义 Poisson 单的状态空间扩大为一切整数的集时，它们却有三点转移函数族，我们称之为扩状 Poisson 三点转移函数族. 第 12 章专论 Brown 单即两参数布朗运动. 讨论了它在曲线上的导出过程、鞅性、0-1 律、两参数马氏性、样本函数性质、奇点蔓延等. 第 13 章专论两参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程. 讨论了它的基本性质、两参数马氏性、奇点蔓延、预测及导出过程等. 第 5 篇马氏型两参数随机微分方程含第 14 章，讨论了作为随机微分方程解的两参数马氏过程，讨论了解的存在性，解的两参数马氏性，宽过去强马氏性及解的估计.

本书基本上是自封闭的. 从基础知识写起，逐步深入，精心编排，首次将两参数马氏过程的结果形成一个理论体系. 对单参

数随机过程和单参数马氏过程较熟悉的读者，阅读本书不会有太大的困难．第1，3章是必须读的，读完第1，3章后，基本上可以直接阅读读者感兴趣的章节．这里列出的各章间关系图，可以作为读者阅读本书的向导．

各章间关系图



第 I 篇

条件独立性和两参数鞅

1 预备知识

§1.1 常用记号

设 $Z=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，$Z_+=\{0,1,2,\cdots\}$，$R^1=R=(-\infty,+\infty)$，$R_+=[0,+\infty)$. 对 $0<d\in Z_+$，记 d 次乘幂 $R^d=R\times\cdots\times R$，$Z^d=Z\times\cdots\times Z$，$R_+^d=R_+\times\cdots\times R_+$，$Z_+^d=Z_+\times\cdots\times Z_+$. 记

$$T_+^d=T_+^{(1)}\times\cdots\times T_+^{(d)},T_+^{(i)}=R_+\text{或 }Z_+,1\leqslant i\leqslant d.$$

R^d 或 R_+^d 中 Borel 集全体记为 $\mathscr{B}(R^d)$或 $\mathscr{B}(R_+^d)$. 当 $d=2$ 时，我们将恒设 $T_+^2=R_+^2$或 $T_+^2=Z_+^2$，虽然本书中许多概念和结论对 $T_+^2=R_+\times Z_+$或 $T_+^2=Z_+\times R_+$ 也适用. 记号 I_A 表示集 A 的示性函数. 记号"$\forall$ "表示"对任意". 记号"▮"表示定理的证明结束.

设$(E,\mathscr{E})$表示可测空间. 本书中，除特别指明外，$(E,\mathscr{E})$恒表示下面两种空间：E 是可列集，有离散拓扑，$\mathscr{E}$ 是 E 的所有子集全体，此时不妨设 $E=Z_+$；$E=R^d$，$\mathscr{E}=\mathscr{B}(R^d)$. $(E^d,\mathscr{E}^d)$表示$(E,\mathscr{E})$的 d 次乘积空间. $b\mathscr{E}^d$ 表示$(E^d,\mathscr{E}^d)$上的实值、有界、$\mathscr{E}^d$ 可测函数全体. 当 $d=1$ 时，上述诸记号中，d 可略写.

设 $D\subset R$，$D\in\mathscr{B}(R)$，记 $\mathscr{B}(D)=D\cap\mathscr{B}(R)$，$\mathscr{B}_b(D)=\{A:A\in\mathscr{B}(D),|A|<\infty\}$，$|A|$表示 A 的勒贝格测度.

设 $z=(s,t)$，$y=(u,v)\in T^2$. 记号 $z\leqslant y$ 表示 $s\leqslant u$ 且 $t\leqslant v$；$z<y$ 表示 $s<u$ 且 $t<v$；$z\ll y$ 表示 $s<u$ 且 $t>v$；记 $z\wedge y=(s\wedge u,t\wedge v)$，$z\vee y=(s\vee u,t\vee v)$，$z\otimes y=(s,v)$.

设 $z\leqslant y$，称左开右闭区间

$$(z,y]=\{x:x\in T_+^2,z<x\leqslant y\}$$

为正位矩形. 类似定义区间$[z,y)$,$[z,y]$,(z,y)等.

设 $z=(s,t)\in T_+^2$,$y=(u,v)\in T_+^2$,引进 T_+^2的子集的下列记号:

$L_z=\{(u,t):u\geqslant 0\}$,$V_z=\{(s,v):v\geqslant 0\}$,

$L_z^+=\{y:y\in L_z,y\geqslant z\}$,$L_z^-=\{y:y\in L_z,y\leqslant z\}$.

$V_z^+=\{y:y\in V_z,y\geqslant z\}$,$V_z^-=\{y:y\in V_z,y\leqslant z\}$.

$\lambda_z=L_z^+\cup V_z^+$,$\mu_z=L_z^-\cup V_z^-$.

$R_z^1=R_s^1=\{(u,v):u\leqslant s,v\geqslant 0\}$,

$R_z^2=R_t^2=\{(u,v):u\geqslant 0,v\leqslant t\}$.

$R_z^{1c}=R_s^{1c}=\{(u,v):u\geqslant s,v\geqslant 0\}$,

$R_z^{2c}=R_t^{2c}=\{(u,v):u\geqslant 0,v\geqslant t\}$.

$R_z=R_z^1\cap R_z^2=[0,z]$,$R_z^c=R_z^{1c}\cup R_z^{2c}$.

$R_z^*=R_z^1\cup R_z^2$,$R_z^{*c}=\{y:y\geqslant z\}=[z,\infty)$.

$U_z^0=(z,\infty)$,$Q_1(z)=[z,\infty)$,$Q_3(z)=[0,z)$.

$Q_2(z)=\{y:y\ll z$ 或 $y\in L_z^-\}$,

$Q_4(z)=\{y:z\ll y$ 或 $y\in V_z^-\}$.

特别地,λ_0 表示 T_+^2的边界,0 也表示原点(0,0).

设 $z=(s,t)\in T_+^2$,$D\subset T_+^2$,定义投影

$\pi_z^1(D)=\pi_s^1(D)=\{(s,v)\in T_+^2$:存在 u 使$(u,v)\in D\}$.

$\pi_z^2(D)=\pi_t^2(D)=\{(u,t)\in T_+^2$:存在 v 使$(u,v)\in D\}$.

$\pi_z(D)=\pi_z^1(D\cap R_z^2)\cup\pi_z^2(D\cap R_z^1)\cup\{z\wedge y:y\in D\cap R_z^{*c}\}$.

$\pi_z^*(D)=\pi_z^1(D)\cup\pi_z^2(D)\cup\{z\wedge y:y\in D\cap R_z^{*c}\}$.

当 $T_+^2=R_+^2$时,ρ 表示 R_+^2中的欧几里得距离. 对 $D\subset R_+^2$,引进邻域:

D 的 ε 邻域 $O(D,\varepsilon)=\{z\in R_+^2:\rho(z,D)<\varepsilon\}$.

∂D 的$\frac{1}{n}$内邻域 $O_n^+(\partial D)=\{z\in\overline{D}:\rho(z,\partial D)<\frac{1}{n}\}$.

∂D 的$\frac{1}{n}$外邻域 $O_n^-(\partial D)=\{z\in\overline{D^c}:\rho(z,\partial D)<\frac{1}{n}\}$.

其中,n 为正整数,$D^c=R_+^2-D$,$\overline{D}$ 和$\overline{D^c}$分别表示 D 和 D^c 的闭包,

∂D 是 D 的边界. 特别地, 当 $D=\{z\}$ 时, 简记 $O(\{z\},\varepsilon)$ 为 $O(z,\varepsilon)$.

设 $X=\{X(z),z\in R_+^2\}$ 是定义在 R_+^2 上的 E 值函数. 如果当 $y\in Q_i(z)$ 且 $y\to z$ 时极限 $\lim X(y)$ 存在, 则记极限值为 $X_i(z)$. 分别称 $X_3(z)$、$X_1(z)$ 为 X 在点 z 的左、右极限. 如果对 $i=1,2,3,4$, $X_i(z)$ 均存在, 称 X 为灯函数, 并称 $X_i(z)(1\leqslant i\leqslant 4)$ 为灯极限. 函数 X 称为单增的, 如果 $\forall\ z\leqslant y$ 有 $X(z)\leqslant X(y)$; 称为矩形增的, 如果 $\forall\ z\leqslant y$, X 在 $(z,y]$ 上的矩形增量 $X(z,y]\geqslant 0$. 这里以及今后,

$$X(z,y]=X(y)-X(z\otimes y)-X(y\otimes z)+X(z).$$

如果 X 单增又矩形增, 称 X 为双增函数. 单增和矩形增是互不蕴含的两个概念.

§1.2 两参数随机过程的基本概念

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是完备概率空间. 设 $(\mathscr{F}_z,z\in T_+^2)$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域族, 满足条件 $(F_1)(F_2)$:

(F_1) 单增性　如 $z\leqslant y$, 有 $\mathscr{F}_z\subset\mathscr{F}_y$.

(F_2) 完备性　$\mathscr{F}_0$ 含所有的零概率集.

对族 $(\mathscr{F}_z,z\in T_+^2)$, 令

$$\mathscr{F}_{z+}=\bigcap_{y>z}\mathscr{F}_y,\ \mathscr{F}_{z-}\doteq\bigvee_{y<z}\mathscr{F}_y,\ \mathscr{F}_{\infty-}=\bigvee_{z\in T_+^2}\mathscr{F}_z.$$

再引进两个完备的子 σ 域 $\mathscr{F}_{o-}$ 和 $\mathscr{F}_\infty$, 满足

$$\mathscr{F}_{o-}\subset\mathscr{F}_0,\ \mathscr{F}_{\infty-}\subset\mathscr{F}_\infty.$$

有时, 我们还引进条件

(F_3) 右连续性　$\mathscr{F}_z=\mathscr{F}_{z+}$, 对 $z\in T_+^2=R_+^2$.

(F_4) 条件独立性　$\forall\ z\in T_+^2$, 在条件 $\mathscr{F}_z$ 之下, $\mathscr{F}_z^1$ 和 $\mathscr{F}_z^2$ 条件独立, 记为

$$(\mathscr{F}_z^1,\mathscr{F}_z^2\,|\,\mathscr{F}_z)$$

这里记号

$$\mathscr{F}_z^i=\bigvee_{y\in R_z^i}\mathscr{F}_y,\ i=1,2.$$

有时又记为

$$\mathscr{F}_s^1=\mathscr{F}_z^1,\mathscr{F}_t^2=\mathscr{F}_z^2,\text{ 如 } z=(s,t).$$

设 $D\subset T_+^2$，记

$$\mathscr{F}(D)=\bigvee_{z\in D}\mathscr{F}_z.$$

特别地

$$\mathscr{F}_z=\mathscr{F}(R_z),\mathscr{F}_z^*=\mathscr{F}(R_z^*)=\mathscr{F}_z^1\vee\mathscr{F}_z^2.$$

设 $H=(\alpha,\beta)$，α 和 β 分别是取值于 $T_+^{(1)}\cup\{\infty\}$ 和 $T_+^{(2)}\cup\{\infty\}$ 的随机变量. 如果 $\forall z\in T_+^2$，有 $(H\leqslant z)\in\mathscr{F}_z$（相应地，$(H<z)\in\mathscr{F}_z$，$(H\leqslant z)\in\mathscr{F}_z^*$，$(H<z)\in\mathscr{F}_z^*$），则称 H 为 $(\mathscr{F}_z,z\in T_+^2)$ 停点（相应地，宽停点，弱停点，弱宽停点）.

设 H 为弱停点，记

$$\mathscr{F}_H^*=\{A\in\mathscr{F}_\infty:\forall z\in T_+^2,A\cap(H\leqslant z)\in\mathscr{F}_z^*\},$$

$$\mathscr{F}_{H-}^*=\sigma\{\mathscr{F}_{o-};A\cap(z<H):A\in\mathscr{F}_z^*,z\in T_+^2\},$$

$$\mathscr{F}_{H+}^*=\{A\in\mathscr{F}_\infty:\forall z\in T_+^2,A\cap(H<z)\in\mathscr{F}_z^*\}.$$

它们都是 σ 域，并称 $\mathscr{F}_H^*$ 和 $\mathscr{F}_{H-}^*$ 分别为 H 前事件 σ 域和严格 H 前事件 σ 域.

称 $L\subset R_+^2$ 为分割线，如果 L 是连续曲线，L 将 R_+^2 分割成两部份，且 L 中任何两点无严格的序关系.

分割线全体记为 $\mathscr{L}$. 坐标轴 λ_0 与 L 围成的闭区域记为 $[0,L]$. 记 $[0,L)=[0,L]-L$. 在 $\mathscr{L}$ 中确定半序关系"$\leqslant$"如下：设 $L_1,L_2\in\mathscr{L}$，如果 $[0,L_1]\subset[0,L_2]$，记为 $L_1\leqslant L_2$，并记 $[L_1,L_2)=[0,L_2)-[0,L_1)$；如果 $[0,L_1]\subset[0,L_2)$，则记 $L_1<L_2$. 记 $\mathscr{B}(\mathscr{L})$ 为由集类 $\{[0,L]:L\in\mathscr{L}\}$ 生成的 R_+^2 上的 σ 域. 固定 $l\in\mathscr{L}$，记 $\mathscr{F}([0,l])=\bigvee_{z\in[0,l]}\mathscr{F}_z$.

设 L 是可测映射：$(\Omega,\mathscr{F})\to(\mathscr{L},\mathscr{B}(\mathscr{L}))$，满足 $\{\omega:L(\omega)\leqslant l\}\in\mathscr{F}([0,l])$（相应地，$\{\omega:L(\omega)<l\}\in\mathscr{F}([0,l])$），称 L 为停线（相应地，宽停线）.

设 L 是宽停线，记 σ 域

$$\mathscr{F}_{L+}=\{A\in\mathscr{F}_\infty:A\cap(L<l)\in\mathscr{F}([0,l]),\forall l\in\mathscr{L}\}.$$

显然，如 $L_1\leqslant L_2$，则 $\mathscr{F}_{L_1+}\subset\mathscr{F}_{L_2+}$.

设 $X=\{X(z),z\in T_+^2\}$是定义在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上，取值于$(E,\mathscr{E})$的两参数随机过程. 有时记 $X(z)$为 X_z 或 $X(z,\omega),\omega\in\Omega$. 如果$\forall\ z\in T_+^2$，$X(z)$是 $\mathscr{F}_z$ 可测的，称 X 为关于$\{\mathscr{F}_z,z\in T_+^2\}$适应的. 因此，为更明确，有时我们也记 X 为

$$X=(\Omega,\mathscr{F},P;E,\mathscr{E};\mathscr{F}_z,X(z),z\in T_+^2).$$

对 $D\subset T_+^2$，记

$$\mathring{\mathscr{F}}(D)=\sigma\{X(z),z\in D\}.$$

这里以及今后，$\sigma\{\cdots\}$表示括号内的随机变量族或子集类产生的 σ 域并完备化. 特别地

$$\mathring{\mathscr{F}}_z=\mathring{\mathscr{F}}(R_z)=\sigma\{X(y),y\leqslant z\},$$

并称$\{\mathring{\mathscr{F}}_z,z\in T_+^2\}$为过程 X 的自然 σ 域族. 在本书中，如过程 X 事先给定而未特别给定$\{\mathscr{F}_z\}$，则$\{\mathscr{F}_z\}$指$\{\mathring{\mathscr{F}}_z\}$，除非特别说明.

设 $Y=\{Y(z),z\in T_+^2\}$也是定义在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的随机过程. 如果$\forall\ z\in T_+^2$，$P\{X(z)=Y(z)\}=1$，称 Y 与 X 等价或互为修正. 如果过程 Y 和 X 有相同的有限维分布族，甚至允许过程 X 和 Y 定义在不同的概率空间上，称 X 与 Y 为同(有限维)分布的.

下面就 $T_+^2=R_+^2$来叙述过程 $X=\{X(z),z\in R_+^2\}$的几种属性.

如果对每个 $\omega\in\Omega$，函数$\{X(z,\omega),z\in R_+^2\}$是连续函数，称过程 X 为连续的. 类似定义 X 是右连续的，左连续的，左极(有左极限)的.

由全体右连、左极、$\{\mathscr{F}_z,z\in R_+^2\}$适应过程所产生的 $R_+^2\times\Omega$ 上的 σ 域，称为可选 σ 域，记为 $\mathscr{O}$. 由全体左连续、$\{\mathscr{F}_{z-},z\in R_+^2\}$适应过程产生的 $R_+^2\times\Omega$ 上的 σ 域，称为可料 σ 域，记为 $\mathscr{P}$.

关于 $\mathscr{O}$ 可测的过程 X 称为可选过程. 关于 $\mathscr{P}$ 可测的过程 X 称为可料过程.

称过程 $X=\{X(z),z\in R_+^2\}$为可测的，如果$\forall\ B\in\mathscr{E}$，有

$$\{(z,\omega):X(z,\omega)\in B\}\in\overline{\mathscr{B}(R_+^2)\times\mathscr{F}}.$$

其中$\overline{\mathscr{B}(R_+^2)\times\mathscr{F}}$表示乘积$\sigma$域$\mathscr{B}(R_+^2)\times\mathscr{F}$关于乘积测度$L\times P$的完备化，$L$是勒贝格测度.

称X为乘积可测的或Borel可测的，如果$\forall B\in\mathscr{E}$，有

$$\{(z,\omega):X(z,\omega)\in B\}\in\overline{\mathscr{B}(R_+^2)\times\mathscr{F}}.$$

称过程X为强可测的，或循序（可测）的，如果$\forall z\in R_+^2$，X限制在$R_z\times\Omega$上时，是$\mathscr{B}(R_z)\times\mathscr{F}_z$可测的.

假定过程X允许取值"∞"，但$\forall z\in R_+^2$，$P\{X(z)=\infty\}=0$. 称X为可分的，如果存在R_+^2上的可数稠子集Q和概率为零的子集Λ，使对一切开集$G\subset R_+^2$，闭集$F\subset E$，有

$$\{X(z)\in F\text{ 对一切 }z\in GQ\}-\{X(z)\in F\text{ 对一切 }z\in G\}\subset\Lambda.$$

称Λ为例外集，Q为可分集. 如果X对R_+^2的任意可数稠子集都可分，称X为完全可分的.

如果$\forall z\in R_+^2$，当$y\to z$时，$X(y)$依概率趋于$X(z)$，称X为随机连续的.

与单参数过程相仿（见王梓坤[1]，§3.1定理1和2，§3.3定理1），对两参数过程$X=\{X(z),z\in R_+^2\}$，我们有：设X随机连续，则存在完全可分的、可测的修正.

§1.3 单调类和复合函数定理

1.1 定义 设Ω是非空集合，$\mathscr{C}$是Ω的一些子集组成的集系，称为Ω上的子集系. 如果$\mathscr{C}$满足下面的条件（i）（ii）（iii）：

（i）$\Omega\in\mathscr{C}$.

（ii）如$A\in\mathscr{C}$，则$\Omega-A\in\mathscr{C}$.

（iii）如$A_i\in\mathscr{C}$，$i=1,2,\cdots,n$，则$\bigcup_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{C}$.

称$\mathscr{C}$为域，如果$\mathscr{C}$满足上述（i）（ii）及下面的（iv）：

（iv）如$A_i\in\mathscr{C}$，$i=1,2,\cdots$，则$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{C}$.

称 $\mathscr{C}$ 为 σ 域也称为 σ 代数. 如果 $\mathscr{C}$ 仅只满足下面的条件 (v):

(v) 如 $A_n\in\mathscr{C}$, 且 $A_n\uparrow A$ 或 $A_n\downarrow A$, 则 $A\in\mathscr{C}$.

称 $\mathscr{C}$ 为单调类. 如果 $\mathscr{C}$ 仅只满足下面的条件 (vi):

(vi) 如 A, $B\in\mathscr{C}$, 则 $AB\in\mathscr{C}$.

称 $\mathscr{C}$ 为 π 系. 如果 $\mathscr{C}$ 仅只满足下面的条件 (vii) (viii) (vx):

(vii) $\Omega\in\mathscr{C}$.

(viii) 如 A, $B\in\mathscr{C}$, $A\subset B$, 则 $B-A\in\mathscr{C}$.

(vx) 如 $A_n\in\mathscr{C}$, $A_n\uparrow A$, 则 $A\in\mathscr{C}$.

称 $\mathscr{C}$ 为 λ 系.

下面的定理是熟知的.

1.2 定理 如果 $\mathscr{C}$ 既是 π 系又是 λ 系, 或者, $\mathscr{C}$ 既是域又是单调类, 则 $\mathscr{C}$ 是 σ 域.

下面的定理是集合形式的单调类定理.

1.3 定理 设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{A}$ 均是 Ω 上的子集系, $\mathscr{C}\subset\mathscr{A}$. 如果下面条件之一满足:

(i) $\mathscr{A}$ 是 λ 系, $\mathscr{C}$ 是 π 系.

(ii) $\mathscr{A}$ 是单调类, $\mathscr{C}$ 是域.

则 $\sigma(\mathscr{C})\subset\mathscr{A}$. 这里以及今后, $\sigma(\mathscr{C})$ 表示由 $\mathscr{C}$ 产生的 Ω 上的 σ 域.

下面的三个定理是函数形式的单调类定理.

1.4 定理 设 $\mathscr{C}$ 是集合 Ω 上的 π 系, $\mathscr{H}$ 是 Ω 上的一些实值函数组成的线性空间, 满足下列条件 (i) (ii) (iii):

(i) $1\in\mathscr{H}$.

(ii) 如 $f_n\in\mathscr{H}$, $0\leqslant f_n\uparrow f$, f 有限 (相应地, 有界), 则 $f\in\mathscr{H}$.

(iii) 对一切 $A\in\mathscr{C}$, 示性函数 $I_A\in\mathscr{H}$.

则 $\mathscr{H}$ 包含 Ω 上的一切 $\sigma(\mathscr{C})$ 可测的有限实值(相应地,有界) 函数.

1.5 定理 设 $\mathscr{H}$ 是 Ω 上的一些有界函数组成的族, 它对于一致有界且单调的序列取极限封闭 (以后称 $\mathscr{H}$ 为单调族). 设 $\mathscr{C}\subset\mathscr{H}$, 且下面两条件之一满足:

(i)　$\mathscr{C}$ 是线性空间，$1\in\mathscr{C}$，$\mathscr{C}$ 对取有限下端运算封闭.

(ii)　$\mathscr{C}$ 是域（即 $\mathscr{C}$ 是线性空间且对乘积封闭），$1\in\mathscr{C}$，$\mathscr{C}$ 对一致收敛封闭.

则 $\mathscr{H}$ 包含一切 σ（f，$f\in\mathscr{C}$）可测的有界函数.

这里以及今后，$\sigma(f, f\in\mathscr{C})$ 表示由括号内函数所产生的 σ 域，即它是使每个 $f\in\mathscr{C}$ 可测的 Ω 上的最小 σ 域.

1.6 定理　设 $\mathscr{H}$ 是 Ω 上的一些有界函数组成的族，它对一致有界的单调序列取极限封闭，且对一致收敛也封闭. 设 $\mathscr{C}\subset\mathscr{H}$，且下面两个条件之一满足：

(i)　$\mathscr{H}$ 是线性空间，$1\in\mathscr{H}$，$\mathscr{C}$ 对乘积封闭.

(ii)　$\mathscr{C}$ 是域，且存在序列 $f_n\in\mathscr{C}$，使 f_n 一致收敛于 1.

则 $\mathscr{H}$ 包含一切 $\sigma(f, f\in\mathscr{C})$ 可测的有界函数.

下面的定理是 Doob 复合函数定理.

1.7 定理　设 f 是 Ω 到可测空间（E，$\mathscr{E}$）中的映射，φ 是 Ω 上的复值函数，为使 φ 是 $\sigma(f)$ 可测的，必须而且只需，存在 E 上的 $\mathscr{E}$ 可测复值函数 h，使 φ 是 h 与 f 的复合，即 $\varphi=h\circ f$. 如果 φ 是实值（相应地，有界）的，则可选取 h 也是实值（相应地，有界）的.

下面的定理是 Doob 复合函数定理的重要应用.

1.8 定理　设 $\{(E_i, \mathscr{E}_i), i\in I\}$ 是一族可测空间. 对每个 $i\in I$，f_i 是 Ω 到（E_i，$\mathscr{E}_i$）的映射. 设 φ 是 Ω 上的 $\sigma(f_i, i\in I)$ 可测的复值（相应地，实值）函数，则存在 I 的可数子集 J，以及 $\left(\prod_{i\in J}E_i, \prod_{i\in J}\mathscr{E}_i\right)$ 上的可测复值（相应地，实值）函数 h，使得 $\varphi=h\circ f_J$. 这里 $f_J=(f_i, i\in J)$ 是 Ω 到 $\prod_{i\in J}E_i$ 的映射.

§1.4　单参数马尔可夫链

1.9 定义　设 E 是可列集，称为状态空间. 对每个 i，$j\in E$，设有二元实值函数 $P_{ij}(u, v)$，u，$v\in T_+$，$u<v$，并记 $P(u,v)=$

$\{P_{ij}(u, v): i, j\in E\}$. 如果对任意 $i, j\in E$, $u, v\in T_+$, $u<v$, 下面的 (i) (ii) (iii) 成立:

(i) $P_{ij}(u, v)\geqslant 0$.

(ii) $\sum_j P_{ij}(u, v) = 1$.

(iii) $P_{ij}(u, v) = \sum_E P_{ik}(u, v')P_{kj}(v', v), u < v' < v$.

称 $\mathscr{P} = \{P(u, v): u, v\in T_+, u<v\}$ 为(单参数)转移函数族. 如果条件 (ii) 中减弱为"$\leqslant$", $\mathscr{P}$ 称为广义转移函数族. 如果每个 $P(u, v)$ 只依赖于 $v-u$, 称 $\mathscr{P}$ 为齐次的, 此时记 $P_{ij}(u,v) = P_{ij}(v-u)$. 如果 $T_+=R_+$, 且每个 $P_{ij}(s)$ 是 $s>0$ 的勒贝格可测函数, 称齐次转移函数 $\mathscr{P} = \{P_{ij}(s), i, j\in E, s>0\}$ 为可测转移函数族.

1.10 定理 设 $\mathscr{P} = \{P(t); t > 0\}$ 是齐次转移函数族. 则下列 5 个条件等价:

(i) $\mathscr{P}$ 可测.

(ii) 对任意指定的 $a>0$,

$$\lim_{h\to 0+}\sup_{t\geqslant a}\sum_j |P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)| = 0 \qquad (10.1)$$

(iii) 对任意指定的 $a > 0$, 每个 $P_{ij}(t)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续, 而且该一致性对 j 也成立. 确切地说, 对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta = \delta(a) >0$, 使当 $|h|<\delta$ 时, 有

$$|P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)| < \varepsilon, \forall\, t\geqslant a \text{ 及 } j\in E \qquad (10.2)$$

(iv) $P_{ij}(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, $i, j\in E$.

(v) 对 $i, j\in E$, 存在近极限

$$\lim_{t\to 0+} P_{ij}(t) = u_{ij} \qquad (10.3)$$

当 $u_{ii}=1$ (从而 $u_{ij}=0$, $j\neq i$), $i\in E$, 时, 称 $\mathscr{P}$ 是标准的.

1.11 定理 设 $\mathscr{P}$ 是可测转移函数族, 则近极限矩阵 $U=(u_{ij})$ 具有下面的性质 (i) (ii) (iii):

(i) 非负性 $u_{ij}\geqslant 0$.

(ii) 拟规范性 $\sum_j u_{ij}\leqslant 1$.

(iii) 幂等性 $u_{ij} = \sum_k u_{ik} u_{kj}$.

1.12 定理 设 $\mathscr{P}$ 是可测转移函数族. 则对任意 i, $j \in E$, 存在远极限

$$\lim_{t \to +\infty} P_{ij}(t) = v_{ij}, \tag{12.1}$$

而且远极限矩阵 $V = (v_{ij})$ 具有定理 1.11 中的 (i) (ii) (iii), 以及

(iv) $\quad v_{ij} = \sum_k v_{ik} P_{kj}(s) = \sum_k P_{ik}(s) v_{kj}$, $s > 0$.

(v) $\quad$ 如 $v_{ii} \neq 0$, 则 $\sum_j v_{ij} = 1$.

1.13 定理 设 $\mathscr{P}$ 是可测转移函数族, v_{ij} 为远极限(12.1), 则

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{1}{a} \int_0^a P_{ij}(t) dt = v_{ij}, i, j \in E.$$

1.14 定理 设 $v = (u_{ij})$ 是 $E \times E$ 矩阵, 满足定理 1.11 中的 (i) (ii) (iii). 则 E 有分解:

$$E = F \cup \left(\bigcup_{a \in \mathscr{A}} I_a \right) \tag{14.1}$$

其中 F 可以是空的或非空的, $\mathscr{A}$ 是非空有限集或可列无限集, 该分解具有下列性质: 记 $\mathscr{C} = \{I_a; a \in \mathscr{A}\}$,

(i) $\quad u_{ij} = 0 \quad$ 如 $j \in F$.

(ii) 存在实数 u_j, $j \in E - F$, 满足

$$u_j > 0, \quad \sum_{j \in J} u_j = 1, \quad J \in \mathscr{C} \tag{14.2}$$

使得

$$u_{ij} = \delta_{IJ} u_j, \quad \text{如 } i \in I, \ j \in J, \ I, \ J \in \mathscr{C}. \tag{14.3}$$

其中 δ_{IJ} 为 Kronecker 符号.

(iii) 存在非负数 ρ_{iJ}, $i \in F$, $J \in \mathscr{C}$, 满足

$$\sum_{J \in \mathscr{C}} \rho_{iJ} \leqslant 1, \tag{14.4}$$

使得

$$u_{ij} = \rho_{iJ} u_j, \quad i \in F, \ J \in \mathscr{C}. \tag{14.5}$$

反之, 给定 E 的分解 (14.1), 实数 u_j, $j \in E - F$, 满足 (14.2), 非负数 ρ_{iJ}, $i \in F$, $J \in \mathscr{C}$, 满足 (14.4), 则按 (i)、

(14.3) 和 (14.5) 确定的矩阵 $U=(u_{ij})$ 满足定理 1.11 中的 (i) (ii) (iii).

1.15 定理 设 $\mathscr{P}=\{P_{ij}(t), i, j\in E, t>0\}$ 是可测转移函数族, $U=(u_{ij})$ 是其近极限矩阵, 并有分解 (14.1). 则 $\mathscr{P}$ 有下列表现:

(i) $P_{ij}(t)=0$, 如 $i\in E, j\in F, t>0$.

(ii) 存在转移函数族 $\mathscr{G}=\{\Pi_{IJ}(t), I, J\in\mathscr{C}, t>0\}$, 满足

$$\lim_{t\to 0+}\Pi_{IJ}(t)=\delta_{IJ},\tag{15.1}$$

使得

$$P_{ij}(t)=\Pi_{IJ}(t)u_j, \text{如 } i\in I, j\in J, I, J\in\mathscr{C}, t>0.$$

其中 $\quad u_j=u_{jj}$. (15.2)

(iii) 存在 $(0, +\infty)$ 上的连续函数 $\Pi_{iJ}(t), i\in F, J\in\mathscr{C}$, 满足

$$\left.\begin{aligned}&\Pi_{iJ}(t)\geqslant 0, \sum_{J\in\mathscr{C}}\Pi_{iJ}(t)=1,\\&\sum_{M\in\mathscr{C}}\Pi_{iM}(s)\Pi_{MJ}(t)=\Pi_{iJ}(s+t).\end{aligned}\right\}\tag{15.3}$$

使得

$$P_{ij}(t)=\Pi_{iJ}(t)u_j, i\in F, j\in J, J\in\mathscr{C}, t>0.\tag{15.4}$$

反之, 任给 E 的分解 (14.1), 任给满足 (15.1) 的转移函数族 $\mathscr{C}=\{\Pi_{IJ}(t), I, J\in\mathscr{C}, t>0\}$, 任给满足 (15.3) 的连续函数 $\Pi_{iJ}(t), t>0, i\in F, j\in J, J\in\mathscr{C}$, 任给满足 (14.2) 的数 u_j, $j\in E-F$, 按 (i) 及 (15.2) (15.3) 定义的 $\mathscr{P}=\{P_{ij}(t), i, j\in E, t>0\}$ 是可测转移函数族.

1.16 定理 设 $\mathscr{P}$ 是可测转移函数族, $P_{ij}(t), t>0$ 为 $\mathscr{P}$ 的一个元素, 则 $P_{ij}(t)$ 在 $t\in(0, +\infty)$ 上或恒等于零, 或恒大于零. 当 $i\in F$ 时, 级数 $\sum_j P_{ij}(t)$ 在 $(0, M]$ 上一致收敛. M 是任一正数.

设 $X=\{X(t), t\geqslant 0\}$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上, 取值于可测空间 $(E, \mathscr{E})$ 的随机过程. 设 E 是可列的, 有离

散拓扑，用“∞”将 E 单点紧化，记 $\overline{E}=E\cup\{\infty\}$.

1.17 定义 称 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 为马氏链，如果对任意的 $0<n\in Z_+$，i_1，i_2，…，i_n，i，$j\in E$，$0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_n\leqslant s$，$t\geqslant 0$，只要 $P\{X(t_k)=i_k,1\leqslant k\leqslant n,X(s)=i\}>0$，就有

$$\begin{aligned}P\{X(s+t)=j|X(t_k)=i_k,1\leqslant k\leqslant n,X(s)=i\}\\=P\{X(s+t)=j|X(s)=i\}.\qquad(17.1)\end{aligned}$$

如果上式右方的值与 $s\geqslant 0$ 无关，称 X 为齐次的. 如果存在转移函数族 $\mathscr{P}=\{P_{ij}(t),i,j\in E,t>0\}$，使当 $P\{X(s)=i\}>0$ 时，有

$$P_{ij}(t)=P\{X(s+t)=j|X(s)=i\},\text{对 } t>0,\qquad(17.2)$$

称马氏链 X 有转移函数族 $\mathscr{P}$.

1.18 定理 每个齐次马氏链均有齐次转移函数族.

由于此结论隐含在通常的马氏过程或随机过程的书中，但未给出证明. 此处我们给出构造性的证明.

证 记 $E_+(s)=\{i:P[X(s)=i]>0\}$，$E_0(s)=E-E_+(s)$，$E_+^2(s,t)=\{(i,j):P[X(s)=i,X(t)=j]>0\}$. 令

$$u_{ij}(s)=\begin{cases}\delta_{ij},\text{如 } i\in E_+(s),j\in E,\\r_{ij}=0,\text{如 } i\in E_0(s),j\in E_0(s);\\r_{ij}\geqslant 0,\text{如 } i\in E_0(s),j\in E_+(s).\end{cases}\qquad(18.1)$$

其中 r_{ij} 要求满足 $\sum_j r_{ij}=1$. 对 i，$j\in E$，$0\leqslant s<u$，令

$$P_{ij}(s,u)=\sum_{r\in E_+(s)}u_{ir}(s)P\{X(u)=j|X(s)=r\}.\qquad(18.2)$$

由 X 的齐次性，易知 $P_{ij}(s,s+t)$ 与 s 无关，记为 $P_{ij}(t)$. 易知 (17.2) 成立. 可验证 $\mathscr{P}=\{P_{ij}(t),i,j\in E,t>0\}$ 满足定义 1.9 中的 (i) — (iv)，即 $\mathscr{P}$ 是转移函数族. ∎

1.19 定义 设 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 是取值于可列集 $\overline{E}=E\cup\{\infty\}$ 的随机过程，但对 $t\geqslant 0$ 有 $P\{X(t)=\infty\}=0$. 如果对每个 $\omega\in\Omega$，有

$$\lim_{s\downarrow t}X(s,\omega)=X(t,\omega),\text{一切 } t\geqslant 0,\qquad(19.1)$$

称 X 是右下半连续的.

1.20 定理 任给标准的转移函数族 $\mathscr{P}=\{P_{ij}(t), i, j\in E, t>0\}$，则存在完备的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 及定义在其上的齐次马氏链 $X=\{X(t), t\geqslant 0\}$，它是Borel 可测的，完全可分的，右下半连续的，且以 $\mathscr{P}$ 为其转移函数族.

§1.5 条件独立性

条件独立性是通常的独立性的一般化，而马尔可夫性可以看作是一种条件独立性.

1.21 约定 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是完备概率空间. 如 $A_1, A_2\in\mathscr{F}$ 且 $P(A_1-A_2)+P(A_2-A_1)=0$，将视 A_1 与 A_2 相同；如 f_1，f_2 均为 $\mathscr{F}$ 可测函数，$P(f_1\neq f_2)=0$，将视 f_1 与 f_2 相同，并记为 $f_1=f_2$.

1.22 定义 设 $\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$，$\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的三个子 σ 域，如果对任意 $A_i\in\mathscr{A}_i$，$i=1, 2$，有

$$P(A_1A_2|\mathscr{G})=P(A_1|\mathscr{G})P(A_2|\mathscr{G}), \tag{22.1}$$

称 $\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$ 关于 $\mathscr{G}$ 条件独立，或称 $\mathscr{G}$ 分裂 $\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$，或称 $\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$ 被 $\mathscr{G}$ 分裂，记为

$$(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2|\mathscr{G}), \tag{22.2}$$

称 $\mathscr{G}$ 为 $\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{A}_2$ 的一个分裂 σ 域.

1.23 定义 类似定义 $\mathscr{G}$ 分裂 $\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$，…，$\mathscr{A}_n$，并记为

$$(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_n|\mathscr{G}). \tag{23.1}$$

1.24 注 设 $\mathscr{G}$ 是平凡 σ 域，则 $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2|\mathscr{G})$ 就是 $\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{A}_2$ 的独立性.

1.25 注 设 $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2|\mathscr{G})$，$\sigma$ 域 $\mathscr{C}_i\subset\mathscr{A}_i$，$i=1, 2$. 则 $(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2|\mathscr{G})$.

1.26 注 任给 $\mathscr{F}$ 的两个子 σ 域 $\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$，它们的分裂 σ 域 $\mathscr{G}$ 总是存在的.

实际上，只要取 $\mathscr{G}=\mathscr{A}_1$，或 $\mathscr{G}=\mathscr{A}_2$ 即可. 因为，如果 $\mathscr{G}=$

$\mathscr{A}_1$，则

$$P(A_1A_2|\mathscr{A}_1) = I_{A_1}P(A_2|\mathscr{A}_1)$$
$$= P(A_1|\mathscr{A}_1)P(A_2|\mathscr{A}_1).$$

1.27 定义 设 $\mathscr{G}$，$\mathscr{A}_i$，$i=1$，2，…，是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域序列. 如果 $\forall\ 0<n\in Z_+$，(23.1) 成立，称 $\mathscr{A}_i$，$i=1$，2，…关于 $\mathscr{G}$ 条件独立，或称 $\mathscr{G}$ 分裂 $\mathscr{A}_i$，$i=1$，2，…，记为

$$(\mathscr{A}_i, i = 1,2,\cdots|\mathscr{G}). \tag{27.1}$$

1.28 定义 设 ξ_i 为随机变量或随机向量，$\mathscr{A}_i = \sigma\{\xi_i\}$，$i = 1$，2，…. 如果 $\mathscr{G}$ 分裂 $\mathscr{A}_i$，$i=1$，2，…，称 ξ_i，$i=1$，2，…关于 $\mathscr{G}$ 条件独立.

1.29 注 相依随机变量可以是条件独立的，独立随机变量也可以是非条件独立的.

马氏过程可以作为前者的例子. 作为后者的例子，可以取独立的随机变量 ξ_1，ξ_2，它们有相同的离散分布：取 -1 和 1 的概率均是 0.5. 记 $\xi=\xi_1+\xi_2$，并令 $\mathscr{G} = \sigma(\xi)$，则 ξ_1，ξ_2 关于 $\mathscr{G}$ 是非条件独立的.

实际上，令 $A = (\xi = 0)$，则 $P(A) = 0.5 > 0$. 当 $\omega\in A$ 时，

$$P(\xi_1 = 1,\xi_2 = 1|\mathscr{G})(\omega) = P(\xi_1 = 1,\xi_2 = 1|\xi)(\omega)$$
$$= P(\xi_1 = 1,\xi_2 = 1|\xi = 0) = 0,$$
$$P(\xi_1 = 1|\mathscr{G})(\omega)\cdot P(\xi_2 = 1|\mathscr{G})(\omega)$$
$$= P(\xi_1 = 1|\xi = 0)P(\xi_2 = 1|\xi = 0)$$
$$= 0.5 \times 0.5 = 0.25,$$

故

$$P(\xi_1 = 1,\xi_2 = 1|\mathscr{G}) \neq P(\xi_1 = 1|\mathscr{G})\cdot P(\xi_2 = 1|\mathscr{G}).$$

即 ξ_1，ξ_2 关于 $\mathscr{G}$ 是非条件独立的.

为了给出条件独立性的几种有用的等价形式，我们先证明一个引理，它本身也是很有用的.

1.30 引理 设 $\mathscr{C}_i$，$i=1$，2，均是 π 系，$\mathscr{A}_i= \sigma(\mathscr{C}_i)$，$i=1$，2. 设 $\forall\ A_i\in\mathscr{C}_i$，$i=1$，2，有 (22.1) 成立，则 $(\mathscr{A}_1，\mathscr{A}_2|\mathscr{G})$.

证 固定 $A_2\in\mathscr{C}_2$，记使 (22.1) 成立的 A_1 全体为 $\mathscr{L}(A_2)$，易

知 $\mathscr{L}(A_2)$ 是 λ 系，依假设 $\mathscr{L}(A_2)\supset\mathscr{C}_1$，从而依定理 1.3，$\mathscr{L}(A_2)\supset\sigma(\mathscr{C}_1)=\mathscr{A}_1$. 即对固定的 $A_2\in\mathscr{L}_2$，(22.1) 对一切 $A_1\in\mathscr{A}_1$ 成立.

任意固定 $A_1\in\mathscr{A}_1$，记使 (22.1) 成立的 A_2 全体为 $\mathscr{L}(A_1)$，易知 $\mathscr{L}(A_1)$ 是 λ 系，依上一段证明的，$\mathscr{L}(A_1)\supset\mathscr{C}_2$，从而依定理 1.3，$\mathscr{L}(A_1)\supset\sigma(\mathscr{C}_2)=\mathscr{A}_2$，即 (22.1) 对任 $A_2\in\mathscr{A}_2$ 成立. 从而对 $A_i\in\mathscr{A}_i$，$i=1$，2，(22.1) 成立. ∎

设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域，$\mathscr{L}^i(\mathscr{A})$ 表示 i 次方可积的 $\mathscr{A}$ 可测函数的集合，即

$$\mathscr{L}^i(\mathscr{A})=\{f: f \text{ 为 } \mathscr{A} \text{ 可测}, \|f\|^i\equiv\int_\Omega|f|^i dP<\infty\}$$

1.31 定理 设 $\mathscr{G}$，$\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$ 均是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域，则下列命题等价：

(i) $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2|\mathscr{G})$.

(ii) $\forall\ \xi_i\in\mathscr{L}^2(\mathscr{A}_i)$，$i=1$，2，有

$$E(\xi_1\xi_2|\mathscr{G})=E(\xi_1|\mathscr{G})E(\xi_2|\mathscr{G}). \tag{31.1}$$

(iii) $(\mathscr{A}_1\vee\mathscr{G}, \mathscr{A}_2\vee\mathscr{G}|\mathscr{G})$.

(iv) 马氏性：$\forall\ A_2\in\mathscr{A}_2$，有

$$P(A_2|\mathscr{A}_1\vee\mathscr{G})=P(A_2|\mathscr{G}). \tag{31.2}$$

(v) $\forall\ \xi_2\in\mathscr{L}^1(\mathscr{A}_2)$，有

$$E(\xi_2|\mathscr{A}_1\vee\mathscr{G})=E(\xi_2|\mathscr{G}). \tag{31.3}$$

(vi) 设 $\mathscr{G}\subset\mathscr{A}_1$，则 $\forall\ A_2\in\mathscr{A}_2$，

$$P(A_1|\mathscr{A}_1) \text{ 为 } \mathscr{G} \text{ 可测}, \tag{31.4}$$

或等价地

$$P(A_2|\mathscr{A}_1)=P(A_2|\mathscr{G}). \tag{31.5}$$

证 (ii) ⇒ (i) 在 (31.1) 中取 $\xi_i=IA_i$，$A_i\in\mathscr{A}_i$，$i=1$，2，得 (22.1).

(i) ⇒ (ii) 由 (i) 得 (31.1) 对 $\xi_i=IA_i$ 成立，其中 $A_i\in\mathscr{A}_i$. 因为 $E(\cdot|\mathscr{G})$ 作为投影算子是线性的，因此，记 $\mathscr{L}_i$ 为形如



IA_i $(A_i\in\mathscr{A}_i)$ 的线性组合全体，则当 $\xi_i\in\mathscr{L}_i$，$i=1$，2，时，

(31.1) 成立. 从而 ξ_i 属于 $\mathscr{L}_i$ 按范数 $\|\cdot\|_2$ 收敛的闭包 $\overline{\mathscr{L}}_i$ 时, (31.1) 也成立. 但 $\overline{\mathscr{L}}_i = \mathscr{L}^2(\mathscr{A}_i)$, 故得 (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (i)　利用注 1.25 即可.

(i) $\Rightarrow$ (iii)　取 $A_i \in \mathscr{A}_i$, $B_i \in \mathscr{G}$, 记 $C_i = A_i B_i$, $i=1, 2$. 则由 (i),

$$
\begin{aligned}
P(C_1C_2|\mathscr{G}) &= I_{B_1}\cdot I_{B_2}P(A_1A_2|\mathscr{G}) \\
&= I_{B_1}\cdot I_{B_2}P(A_1|\mathscr{G})P(A_2|\mathscr{G}) \\
&= P(C_1|\mathscr{G})P(C_2|\mathscr{G}).
\end{aligned}
$$

故

$$
P(C_1C_2|\mathscr{G}) = P(C_1|\mathscr{G})P(C_2|\mathscr{G}). \tag{31.6}
$$

固定 C_2. 记 $\mathscr{L}(C_2)$ 为使上式成立的 C_1 全体, 易知 $\mathscr{L}(C_2)$ 是 λ 系, 由上一段证明知, $\mathscr{L}(C_2)$ 包含 π 系 $\pi_1 = \{A_1B_1 : A_1 \in \mathscr{A}_1, B_1 \in \mathscr{G}\}$, 从而由定理 1.3, $\mathscr{L}(C_2) \supset \sigma(\pi_1) = \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{G}$, 即(31.6) 对 $C_1 \in \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{G}$, $C_2 \in \pi_2 = \{A_2B_2 : A_2 \in \mathscr{A}_2, B_2 \in \mathscr{G}\}$ 成立.

固定 $C_1 \in \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{G}$. 记 $\mathscr{L}(C_1)$ 为使 (31.6) 成立的 C_2 全体. 则 λ 系 $\mathscr{L}(C_1)$ 含 π 系 π_2, 从而 $\mathscr{L}(C_1) \supset \sigma(\pi_2) = \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{G}$. 所以 (iii) 成立.

(iv) $\to$ (i)　任取 $A_i \in \mathscr{A}_i$, $i=1, 2$, 则

$$
\begin{aligned}
P(A_1A_2|\mathscr{G}) &= E[P(A_1A_2|\mathscr{A}_1 \vee \mathscr{G})|\mathscr{G}] \\
&= E[I_{A_1}P(A_2|\mathscr{A}_1 \vee \mathscr{G})|\mathscr{G}].
\end{aligned}
$$

由 (iv), 上式右方等于

$$
E[I_{A_1}P(A_2|\mathscr{G})|\mathscr{G}] = P(A_2|\mathscr{G})P(A_1|\mathscr{G}),
$$

得证 (i).

(i) $\Rightarrow$ (iv)　任取 $A_i \in \mathscr{A}_i$, $i=1, 2$, 则

$$
E[I_{A_1}P(A_2|\mathscr{G})|\mathscr{G}] = P(A_2|\mathscr{G})P(A_1|\mathscr{G}).
$$

由 (i), 上式右方等于

$$
\begin{aligned}
P(A_1A_2|\mathscr{G}) &= E[P(A_1A_2|\mathscr{A}_1 \vee \mathscr{G})|\mathscr{G}] \\
&= E[I_{A_1}P(A_2|\mathscr{A}_1 \vee \mathscr{G})|\mathscr{G}],
\end{aligned}
$$

即

$$
E[I_{A_1}P(A_2|\mathscr{G})|\mathscr{G}]
$$

$$= E[I_{A_1}P(A_2|\mathscr{A}_1 \vee \mathscr{G})|\mathscr{G}],$$

从而对任意 $B\in\mathscr{G}$ 有

$$\int_{A_1B} P(A_2|\mathscr{G})dP = \int_{A_1B} P(A_2|\mathscr{A}_1 \vee \mathscr{G})dP.$$

用 λ-π 系方法易证，上式中用 $C\in\mathscr{A}_1\vee\mathscr{G}$ 代替 A_1B 后仍成立．因此（31.2）成立，即（iv）．

（v）⇒（iv）　在（31.3）中取 $\xi_2=I_{A_2}$，$A_2\in\mathscr{A}_2$，即可．

（iv）⇒（v）　与证（i）⇒（ii）类似．

（i）⇒（31.4）　因（i）⇒（iv），而 $\mathscr{G}\subset\mathscr{A}_1$，故由（31.2）知(31.4)成立．

（31.4）⇒（i）　因 $\mathscr{G}\subset\mathscr{A}_1$，故 $A_i\in\mathscr{A}_i$ 时，

$$\begin{aligned} P(A_1A_2|\mathscr{G}) &= E[P(A_1A_2|\mathscr{A}_1)|\mathscr{G}] \\ &= E[I_{A_1}P(A_2|\mathscr{A}_1)|\mathscr{G}] \end{aligned}$$

由（31.4），上式等于

$$\begin{aligned} &P(A_2|\mathscr{A}_1)E(I_{A_1}|\mathscr{G}) \\ &= E[P(A_2|\mathscr{A}_1)|\mathscr{G}]P(A_1|\mathscr{G}) \\ &= E[P(A_2|\mathscr{G})|\mathscr{A}_1]P(A_1|\mathscr{G}) \\ &= P(A_2|\mathscr{G})P(A_1|\mathscr{G}). \end{aligned}$$

（31.5）⇒（31.4）显然．设（31.4）成立，则上式中实际上已证明了（31.5）成立． ∎

分裂 σ 域的扩大：设 $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2|\mathscr{G}_0)$，又 $\mathscr{G}_0\subset\mathscr{G}_1$．试问，是否一定有 $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2|\mathscr{G}_1)$？回答是否定的．作为反例，取 ξ_1，ξ_2 为注1.29中的随机变量，$\xi=\xi_1+\xi_2$，$\mathscr{G}_0$ 为平凡 σ 域，$\mathscr{A}_i=\sigma(\xi_i)$，$i=1$，2，$\mathscr{G}_1=\sigma(\xi)$．由于 ξ_1，ξ_2 独立，故 $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2|\mathscr{G}_0)$，但注1.29 已指出，$(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2|\mathscr{G}_1)$ 不成立．

1.32 定理　设 $\mathscr{G}_0$，$\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$ 均是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域，$(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2|\mathscr{G}_0)$．则下面的（i）（ii）成立．

（i）　如 $\mathscr{G}_0\subset\mathscr{A}_1$（相应地，$\mathscr{G}_0\subset\mathscr{A}_2$），$\sigma$ 域 $\mathscr{G}$ 满足 $\mathscr{G}_0\subset\mathscr{G}\subset\mathscr{A}_1$（相应地，$\mathscr{G}_0\subset\mathscr{G}\subset\mathscr{A}_2$），则 $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2|\mathscr{G})$．

（ii）　如 σ 域 $\mathscr{G}\supset\mathscr{G}_0$，且 $\mathscr{G}$ 可表为如下形式：

$$\mathscr{G} = \mathscr{G}_1 \vee \mathscr{G}_2, \mathscr{G}_1 \subset \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{G}_0, \mathscr{G}_2 \subset \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{G}_0.$$

则 $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 | \mathscr{G})$.

证 证 (i) 在 (i) 的假设下，有

$$\mathscr{A}_1 \vee \mathscr{G}_0 = \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{G} = \mathscr{A}_1, \tag{32.1}$$

故由定理的前提假设 $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 | \mathscr{G}_0)$. 应用定理 1.31 (iv) 得

$$P(A_2 | \mathscr{A}_1) = P(A_2 | \mathscr{G}_0), A_2 \in \mathscr{A}_2. \tag{32.2}$$

上式两边对 $\mathscr{G}$ 取条件期望，注意 $\mathscr{G}_0 \subset \mathscr{G} \subset \mathscr{A}_1$，得

$$P(A_2 | \mathscr{G}) = P(A_2 | \mathscr{G}_0),$$

于是由 (32.1) (32.2) 及上式得

$$P(A_2 | \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{G}) = P(A_2 | \mathscr{A}_1) = P(A_2 | \mathscr{G}).$$

由定理 1.31 (iv) (i)，上式等价于 $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 | \mathscr{G})$.

证 (ii) 由定理的假设 $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 | \mathscr{G}_0)$，依定理1.31 (iii) (i)，有 $(\mathscr{A}_1 \vee \mathscr{G}_0, \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{G}_0 | \mathscr{G}_0)$. 令 $\overline{\mathscr{G}}_1 = \mathscr{G}_0 \vee \mathscr{G}_1$，则由 (i) 及 $\mathscr{G}_0 \subset \overline{\mathscr{G}}_1 \subset \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{G}_0$ 得 $(\mathscr{A}_1 \vee \mathscr{G}_0, \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{G}_0 | \overline{\mathscr{G}}_1)$. 再利用定理 1.31 (iii) 可得 $(\mathscr{A}_1 \vee \overline{\mathscr{G}}_1, \mathscr{A}_2 \vee \overline{\mathscr{G}}_1 | \overline{\mathscr{G}}_1)$. 注意

$\overline{\mathscr{G}}_1 \subset \mathscr{G}_0 \vee \mathscr{G}_1 \vee \mathscr{G}_2 = \mathscr{G} \subset \mathscr{G}_0 \vee \mathscr{G}_1 \vee \mathscr{A}_2 = \mathscr{A}_2 \vee \overline{\mathscr{G}}_1$ 由 (i) 知 $(\mathscr{A}_1 \vee \overline{\mathscr{G}}_1, \mathscr{A}_2 \vee \overline{\mathscr{G}}_2 | \mathscr{G})$，从而由注 1.25 有 $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 | \mathscr{G})$. ∎

注 1.26 指出：任给两个子 σ 域 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$，其分裂 σ 域 $\mathscr{G}$ 一定存在，例如可取 $\mathscr{G} = \mathscr{A}_1$ 或 $\mathscr{A}_2$. 定理 1.32(ii)说明，比 $\mathscr{A}_1$ 或 $\mathscr{A}_2$ 大的分裂 σ 域存在，例如取 $\mathscr{A}_1 \vee \mathscr{A}_2$. 但比 $\mathscr{A}_1$ 或 $\mathscr{A}_2$ 小的分裂 σ 域是否存在呢？一般来说未必存在. 然而定理 1.32(i)说明，如果存在比 $\mathscr{A}_1$(或 $\mathscr{A}_2$)小的分裂 σ 域，则可以有更多的比 $\mathscr{A}_1$(或 $\mathscr{A}_2$)小的分裂 σ 域.

分裂 σ 域的缩小：设$(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 | \mathscr{G}_i)$，$i=1, 2$. 试问：$\mathscr{G} = \mathscr{G}_1 \cap \mathscr{G}_2$ 是否分裂 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$？答案否定. 例如，取 $\Omega = [0,1]$, $A_1 = \sigma\left\{\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\}$, $\mathscr{A}_2 = \sigma\left\{\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right]\right\}$，令 $\mathscr{G}_i = \mathscr{A}_i$, $i=1,2$. 则 $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2$ 是平凡 σ 域，但它不分裂 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$. 然而，我们有下面的定理.

1.33 定理 设 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ 均是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 域.

(i) 如$(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 | \mathscr{G})$,则 $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2 \subset \mathscr{G}$.

(ii) 设 I 是任意指标集(可列或不可列). 如对每个 $i \in I$,有 $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 | \mathscr{G}_i)$,且 $\mathscr{G}_i \subset \mathscr{A}_1$,则$\left(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \,|\, \bigcap_{i\in I} \mathscr{G}_i\right)$.

(iii) 如对任意的 $0 < n \in Z_+$,有$(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 | \mathscr{G}_n)$,且 $\mathscr{G}_n \downarrow \mathscr{G}$ 或 $\mathscr{G}_n \uparrow \mathscr{G}$,则$(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 | \mathscr{G})$.

证 (i)设 $A \in \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2$. 由(i)的假设及定理 1.31(iv)有

$$P(A | \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{G}) = P(A | \mathscr{G}). \tag{33.1}$$

因 $A \in \mathscr{A}_1$,上式左端等于 I_A,注意右方,知 I_A 为 $\mathscr{G}$ 可测,即 $A \in \mathscr{G}$.

(ii) 由假设 $\mathscr{G}_i \subset \mathscr{A}_1$ 知 $\mathscr{A}_1 \vee \mathscr{G}_i = \mathscr{A}_1$. 再依假设$(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 | \mathscr{G}_i)$及定理 1.31(iv)有

$$P(A_2 | \mathscr{A}_1) = P(A_2 | \mathscr{G}_i), A_2 \in \mathscr{A}_2$$

上式说明,对一切 $i \in I$, $P(A_2 | \mathscr{A}_1)$是 $\mathscr{G}_i$ 可测的,从而是 $\bigcap_{i\in I} \mathscr{G}_i$ 可测的. 今设 $\Lambda \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{G}_i$,由(ii)的假设有 $\bigcap_{i\in I} \mathscr{G}_i \subset \mathscr{A}_1$,于是 $\Lambda \in \mathscr{A}_1$. 这样

$$\int_\Lambda P(A_2 | \mathscr{A}_1) dP = P(\Lambda A_2) = \int_\Lambda P(A_2 | \bigcap_{i\in I} \mathscr{G}_i) dP,$$

所以我们有

$$P(A_2 | \mathscr{A}_1) = P(A_2 | \bigcap_{i\in I} \mathscr{G}_i).$$

再注意到 $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_1 \vee (\bigcap_{i\in I} \mathscr{G}_i)$,利用定理 1.31(i)(iv),从上式得 $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 | \bigcap_{i\in I} \mathscr{G}_i)$.

(iii) 依假设,对 $A_i \in \mathscr{A}_i, i = 1, 2$,有

$$P(A_1 A_2 \,|\, \mathscr{G}_n) = P(A_1 | \mathscr{G}_n) P(A_2 | \mathscr{G}_n).$$

由于 $\mathscr{G}_n \uparrow \mathscr{G}$ 或 $\mathscr{G}_n \downarrow \mathscr{G}$,利用单参数鞅的收敛定理(见后面的定理 2.6,2.8),在上式中令 $n \to \infty$ 得(22.1),即$(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 | \mathscr{G})$. ∎

给定子 σ 域 $\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{A}_2$,已指出存在分裂 σ 域 $\mathscr{G}$,例如 $\mathscr{G} =$

$\mathscr{A}_1$ 或 $\mathscr{A}_2$. 但是否存在最小分裂 σ 域呢？定理 1.33(i)表明：分裂 σ 域必包含 $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2$. 定理 1.33(ii)表明，一切含于 $\mathscr{A}_1$ 的分裂 σ 域之交 $\mathscr{G}_1$ 仍是分裂 σ 域，它是含于 $\mathscr{A}_1$ 的分裂 σ 域的最小者，称之为左最小的分裂 σ 域. 类似有右最小分裂 σ 域 $\mathscr{G}_2$. 显然，$\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2 = \mathscr{G}_1 \cap \mathscr{G}_2$. 但 $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2$ 是否为分裂 σ 域？如果是，它当然是最小分裂 σ 域，且必定 $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2 = \mathscr{G}_1 = \mathscr{G}_2$. 但在什么条件下，$\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2$ 是分裂 σ 域？如果 $\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2$ 不是分裂 σ 域，那么最小分裂 σ 域存在吗？为此，我们有下面的结果.

被分裂 σ 域的扩大：由注 1.25 知，缩小被分裂 σ 域，条件独立性仍保持. 但扩大被分裂 σ 域，条件独立性就不一定成立了. 定理 1.31(iii)是扩大被分裂 σ 域仍保持条件独立性的一种情形. 再利用注 1.25，我们得下面的定理.

1.34 定理　设$(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 | \mathscr{G})$，子 σ 域 $\mathscr{A}_i \subset \mathscr{C}_i \subset \mathscr{A}_i \vee \mathscr{G}$，$i=1,2$. 则$(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2 | \mathscr{G})$.

1.35 定理　设 $\mathscr{A}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 5)$ 是子 σ 域，$\mathscr{A}_3 \subset \mathscr{A}_2$. 如果 $(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 | \mathscr{A}_3)$，$(\mathscr{A}_4, \mathscr{A}_5 | \mathscr{A}_2)$，则 $(\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_4, \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{A}_5 | \mathscr{A}_3)$.

证　$\forall A \in \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_4$，应用本定理的假设和定理 1.31(iv)，

$$P(A | (\mathscr{A}_2 \vee \mathscr{A}_5) \vee \mathscr{A}_3) = P(A | \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{A}_5)$$
$$= P(A | \mathscr{A}_2) = P(A | \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{A}_3) = P(A | \mathscr{A}_3).$$

再由定理 1.31(iv) 得$(\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_4, \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{A}_5 | \mathscr{A}_3)$. ∎

1.36 定理　设 $A_i (1 \leqslant i \leqslant 4)$ 是子 σ 域，$\mathscr{A}_4 \subset \mathscr{A}_1$. 如果$(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 | \mathscr{A}_3)$，则$(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{A}_4 | \mathscr{A}_3 \vee \mathscr{A}_4)$.

证　$\forall A \in \mathscr{A}_2, B \in \mathscr{A}_4$，由本定理假设及定理 1.31(iv)，

$$P(AB | \mathscr{A}_1 \vee (\mathscr{A}_3 \vee \mathscr{A}_4)) = P(AB | \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{A}_3)$$
$$= I_B P(A | \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{A}_3) = I_B P(A | \mathscr{A}_3)$$
$$= I_B P(A | \mathscr{A}_3 \vee \mathscr{A}_4)$$
$$= P(AB | \mathscr{A}_3 \vee \mathscr{A}_4).$$

故由定理 1.3，$\forall C \in \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{A}_4$，有

$$P(C | \mathscr{A}_1 \vee (\mathscr{A}_3 \vee \mathscr{A}_4)) = P(C | \mathscr{A}_3 \vee \mathscr{A}_4),$$

即$(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{A}_4 | \mathscr{A}_3 \vee \mathscr{A}_4)$. ∎

1.37 定理 设$\mathscr{A}_i (1 \leqslant i \leqslant 4)$是子$\sigma$域. 如果$(\mathscr{A}_1 \vee \mathscr{A}_4, \mathscr{A}_3 | \mathscr{A}_2)$，则$(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_3 \vee \mathscr{A}_4 | \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{A}_4)$.

证 由定理的假设及定理1.31(iii)知，$(\mathscr{A}_1 \vee \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{A}_4, \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{A}_3 | \mathscr{A}_2)$. 由于$\mathscr{A}_2 \subset \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{A}_4 \subset \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{A}_4 \vee \mathscr{A}_2$，故由定理1.31(i)得$(\mathscr{A}_1 \vee \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{A}_4, \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{A}_3 | \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{A}_4)$. 再次用定理1.31(iv)知，$(\mathscr{A}_1 \vee \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{A}_4, \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{A}_3 \vee \mathscr{A}_4 | \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{A}_4)$，特别地有$(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_3 \vee \mathscr{A}_4 | \mathscr{A}_2 \vee \mathscr{A}_4)$. ∎

1.38 定理 设$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$是相互独立的子$\sigma$域，则$(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 | \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2)$.

证 设$A_i \in A_i$. 由独立性，

$$P(A_2 | \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2) = E[P(A_2 | \mathscr{A}_1) | \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2]$$
$$= E[P(A_2) | \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2] = P(A_2).$$

再由$\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2 \subset \mathscr{A}_1$，有

$$P(A_1 A_2 | \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2)$$
$$= E[P(A_1 A_2 | \mathscr{A}_1) | \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2]$$
$$= E[I_{A_1} P(A_2) | \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2]$$
$$= P(A_2) P(A_1 | \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2).$$

引理得证. ∎

1.39 定理 设$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \mathscr{G}$是$\mathscr{F}$的子$\sigma$域. 如果$\mathscr{A}_1$与$\mathscr{A}_2 \vee \mathscr{G}$独立，则

$$P(A_2 | \mathscr{A}_1 \vee \mathscr{G}) = P(A_2 | \mathscr{G}), A_2 \in \mathscr{A}_2. \tag{39.1}$$

或等价地，

$$P(A_1 A_2 | \mathscr{G}) = P(A_1 | \mathscr{G}) P(A_2 | \mathscr{G}), A_i \in \mathscr{A}_i, i = 1, 2. \tag{39.2}$$

证 设$G \in \mathscr{G}$，则

$$P(A_1 A_2 G) = P(A_1) P(A_2 G)$$
$$= P(A_1) \int_G P(A_2 | \mathscr{G}) dP$$

$$= \int_G P(A_1)P(A_2|\mathscr{G})dP.$$

依假设 $\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{G}$ 独立. 故 $P(A_1)=P(A_1|\mathscr{G})$, 从而

$$P(A_1A_2G) = \int_G P(A_1|\mathscr{G})P(A_2|\mathscr{G})dP.$$

由此得(39.2). ∎

2 两参数鞅

§2.1 单参数鞅

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是完备概率空间，单参数集$T_+=Z_+$或R_+，$(E,\mathscr{E})=(R,\mathscr{B}(R))$. 设$(\mathscr{F}_t,t\in T_+)$是满足条件$(F_1)(F_2)$的子$\sigma$域族，即它是单增的完备$\sigma$域族. 设$\mathscr{F}_{0-}$和$\mathscr{F}_{+\infty}$是两个完备的子$\sigma$域，满足

$$\mathscr{F}_{0-}\subset\mathscr{F}_0,\ \mathscr{F}_{\infty-}=\bigvee_{t\in T_+}\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}_{+\infty}.$$

2.1 定义 单参数随机过程$X=\{X(t),t\in T_+\}$称为(关于$(\mathscr{F}_t,t\in T_t)$)适应的，如果对任意$t\in T_+$，$X(t)$是$\mathscr{F}_t$可测的.

2.2 定义 适应过程$X=\{X(t),t\in T_+\}$称为鞅(关于$(\mathscr{F}_t,t\in T_t)$)(相应地，上鞅，下鞅)，如果$\forall\ t\in T_+$，$X(t)$可积，且当$s<t$时，

$$E\{X(t)|\mathscr{F}_s\}=X(s),(\text{相应地},\leqslant X(s),\geqslant X(s)).$$

2.3 定理 设$T_+=R_+$，$(\mathscr{F}_t,t\in R_+)$满足条件(F_3)，即右连续

$$\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}=\bigcap_{s>t}\mathscr{F}_s,\ t\in R_+,\tag{3.1}$$

则任何$(\mathscr{F}_t,t\in R_+)$鞅$X=\{X(t),t\in R_+\}$有右连续的适应修正.

2.4 定理 设X为$(\mathscr{F}_t,t\in T_+)$上鞅，如果$T_+=R_+$，还设X的几乎一切轨道右连续. 如果$\sup\limits_{t\in T_+}E|X(t)|<+\infty$，则当$t\in T_+$，$t\to+\infty$时，$X(t)$，$a.s.$收敛于某可积的随机变量$X(+\infty)$. 如果$X$是非负上鞅，则$\{X(t),t\in T_+\cup\{+\infty\}\}$是上鞅.

2.5 定理 设 X 是上鞅(相应地,鞅),X 一致可积,即

$$\sup_{t\in T_+}\int_{(|X(t)|>c)}|X(t)|dP\to 0,\text{当 } c\to+\infty \text{ 时}. \tag{5.1}$$

如果 $T_+=R_+$,还设 X 的几乎一切轨道右连续. 则存在可积随机变量 $X(+\infty)$,使当 $t\in T_+,t\to+\infty$时,有 $X(t)\xrightarrow{a.s.,L^1}X(+\infty)$,而且$\{X(t),t\in T_+\cup\{+\infty\}\}$是上鞅(相应地,鞅).

2.6 定理 设 ξ 是可积随机变量,令 $\xi_t=E(\xi|\mathscr{F}_t)$. 如果 $T_+=R_+$,还要求(3.1)成立,从而$\{\xi(t),t\in R_+\}$可以取右连续适应的. 则当 $t\in T_+,t\to+\infty$时,有

$$\xi(t)\xrightarrow{a.s.,L^1}E(\xi|\mathscr{F}_{\infty-}). \tag{6.1}$$

2.7 定理 设X是鞅(或非负下鞅),如果$T_+=R_+$,还设X的所有轨道右连续. 设 $p>1,\sup\limits_{t\in T_+}E|X(t)|^p<+\infty$,则 X 一致可积,且当 $t\in T_+,t\to+\infty$ 时,$X(t)\xrightarrow{a.s.,L^p}X(+\infty)$. 此外,有$\|X(+\infty)\|_p=\sup\limits_{t\in T_+}\|X(t)\|_p$.

2.8 定理 设 ξ 是可积随机变量,$\{\mathscr{G}_n,n\in Z_+\}$是下降的子 σ 域族. 则

$$E\{\xi|\mathscr{G}_n\}\xrightarrow{a.s.,L^1}E\left\{\xi\Big|\bigcap_{n\in Z_+}\mathscr{G}_n\right\}. \tag{8.1}$$

2.9 定义 设随机变量 τ 取值于 $T_+\cup\{+\infty\}$. 如果$\forall\, t\in T_+$,有

$$(\tau\leqslant t)\in\mathscr{F}_t, \tag{9.1}$$

称 τ 关于$\{\mathscr{F}_t,t\in T_+\}$为停时,并称

$$\mathscr{F}_\tau=\{A\in\mathscr{F}_{+\infty}:A(\tau\leqslant t)\in\mathscr{F}_t,\forall t\in T_+\} \tag{9.2}$$

为 τ 前事件 σ 域.

2.10 定理 设 τ 为停时,随机变量 ξ为 $\mathscr{F}_{+\infty}$可测,令 $X(+\infty)=\xi$. 则 $X(\tau)$为 $\mathscr{F}_\tau$ 可测.

2.11 定理 (Doob 停止定理) 设 $X=\{X(t),\ t\in T_+\cup\{+\infty\}\}$ 为鞅(相应地,上鞅). 如果 $T_+=R_+$,还设 X 的几乎一切轨道右连续. 设 α,β 是两个停时,则 $X(\alpha),X(\beta)$ 可积,且

$$E\{X(\beta)|\mathscr{F}_\alpha\} = X(\alpha \wedge \beta) \text{ (相应地, } \leqslant X(\alpha \wedge \beta)).$$
$$(11.1)$$

§2.2 各类两参数鞅

2.11′定义 称 $\{\mathscr{F}_z, z \in T_+^2\}$ 满足通常条件，如果条件 $(F_1)(F_2)$ 满足，而且当 $T_+^2 = R_+^2$ 时，还设右连续条件 (F_3) 满足.

本节中，我们恒设条件 $(F_1)(F_2)$ 满足.

2.12 定义 称过程 $X = \{X(z), z \in T_+^2\}$ 为零初值的，如果 $X(z) = 0, \forall z \in \lambda_0$（$\lambda_0$ 是 T_+^2 的边界）.

2.13 定义 适应的可积过程 $X = \{X(z), z \in T_+^2\}$ 称为

(i) 强鞅，如果 X 是零初值的，且 $\forall z, y \in T_+^2, z < y$，有

$$E\{X(z,y]|\mathscr{F}_z^*\} = 0. \tag{13.1}$$

(ii) 鞅，如果 $\forall z, y \in T_+^2, z \leqslant y$，有

$$E\{X(y)|\mathscr{F}_z\} = X(z). \tag{13.2}$$

(iii) 1 鞅，如果对任意固定的 $t \in T_+^{(2)}$，$\{X(s,t), \mathscr{F}_s^1, s \in T_+^{(1)}\}$ 是单参数鞅. 类似定义 2 鞅.

(iv) 弱鞅，如 $\forall z, y \in T_+^2, z < y$，有

$$E\{X(z,y]|\mathscr{F}_z\} = 0. \tag{13.3}$$

2.14 定理 设条件 (F_4) 成立，X 是鞅，则 X 既是 1 鞅又是 2 鞅. 反之，设 X 既是 1 鞅又是 2 鞅，则 X 是鞅.

证 (i) 设 (F_4) 成立，且 X 是鞅. 对固定 $t \in T_+^{(2)}$，任取 $s, u \in T_+^{(1)}, s < u$，由于 $X(u,t)$ 关于 $\mathscr{F}_t^2$ 可测，利用条件 (F_4) 及定理1.31 (v)，注意 $\mathscr{F}_s^1 \vee \mathscr{F}_{(s,t)} = \mathscr{F}_s^1$，

$$E\{X(u,t)|\mathscr{F}_s^1\} = E\{X(u,t)|\mathscr{F}_{s,t}\}. \tag{14.1}$$

由于 X 是鞅，上式右方等于 $X(s,t)$，所以 X 是 1 鞅. 同理证 X 是 2 鞅.

今设 X 既是 1 鞅又是 2 鞅. $\forall z = (s,t) \leqslant y = (u,v)$，注意 $\mathscr{F}_z \subset \mathscr{F}_s^1, \mathscr{F}_z \subset \mathscr{F}_t^2$，

$$E\{X(y)-X(z)|\mathscr{F}_z\}=E\{X(y)-X(s,v)|\mathscr{F}_z\}+$$
$$E\{X(s,v)-X(z)|\mathscr{F}_z\}=E\{E[X(u,v)-X(s,v)|\mathscr{F}_s^1]|\mathscr{F}_z\}+$$
$$E\{E[X(s,v)-X(s,t)|\mathscr{F}_t^2]|\mathscr{F}_z\}.$$

由于 X 是 1 鞅，第一项 $=E\{0|\mathscr{F}_z\}=0$，由于 X 是 2 鞅，第二项也等于 0. ∎

2.15 定理 (i) $X=\{X(z),z\in T_+^2\}$ 是 1 鞅的充分必要条件是

1° $\forall\ z,y\in T_+^2, z<y$，有

$$E\{X(z,y]|\mathscr{F}_z^1\}=0.$$

2° $\{X(s,0),\mathscr{F}_s^1,s\in T_+^{(1)}\}$ 是单参数鞅.

(ii) 设 $X=\{X(z),z\in T_+^2\}$ 是 1 鞅，则 $\forall$ 固定的 $t\in T_+^{(2)}$，$\{X(s,t),\mathscr{F}_{s,t},s\in T_+^{(1)}\}$ 是单参数鞅. 在条件 (F_4) 下，相反的结论也成立.

证 (i) 充分性 $\forall$ 固定的 $t\in T_+^{(2)}$，$s,u\in T_+^{(1)}$，$s<u$，由 2°，

$$E\{X(u,0)-X(s,0)|\mathscr{F}_s^1\}=0.$$

由此及 1° 得

$$E\{X(u,t)-X(s,t)|\mathscr{F}_s^1\}=E\{X(s,0),(u,t)]|\mathscr{F}_s^1\}$$
$$=0.$$

从而 X 是 1 鞅，充分性证完.

必要性的证明类似，略.

(iii) 由于 $\mathscr{F}_{s,t}\subset\mathscr{F}_{s,t}^1$，必要性显然. 下面证充分性. 固定 t，对 $s<u$，仿定理 2.14 的证明(i)知(14.1)成立，由此及充分性假设得

$$E\{X(u,t)-X(s,t)|\mathscr{F}_s^1\}=E\{X(u,t)-X(s,t)|\mathscr{F}_{s,t}\}.$$ ∎

2.16 定理 设 $X=\{X(z),z\in T_+^2\}$ 是强鞅. 则

(i) X 是鞅.

(ii) X 是 i 鞅 $(i=1,2)$，且如 $D_1=(z_1,y_1]$，$D_2=(z_2,y_2]$，$z=z_1\wedge z_2$，$D_1\cap D_2=\varnothing$，则

$$E\{X(D_1)X(D_2)|\mathscr{F}_z^i\}=0,i=1,2.$$

证 (i) $\forall\ z=(s,t)<y=(u,v)$，因 X 有零初值，故

$$X(y) - X(z) = X((0,t),y] + X((s,0),(u,t)].$$

注意 $\mathscr{F}_z \subset \mathscr{F}^*_{0,t} \cap \mathscr{F}^*_{s,0}$，故

$$E\{X(y)-X(z)|\mathscr{F}_z\}=E\{E(X((0,t),y]|\mathscr{F}^*_{0,t})|\mathscr{F}_z\}$$
$$+ E\{E(X((s,0),(u,t)]|\mathscr{F}^*_{s,0})|\mathscr{F}_z\} = 0. \qquad (16.1)$$

最后的等号是由于 X 的强鞅性. 所以 X 是鞅.

(ii) 设 $z=(s,t)<y=(u,v)$. 由$\mathscr{F}_{s,v}\subset\mathscr{F}^*_z$ 及 X 的强鞅性，

$$E\{X(z,y]|\mathscr{F}_{s,v}\} = E\{E(X(z,y]|\mathscr{F}^*_z)|\mathscr{F}_{s,v}\} = 0. \qquad (16.2)$$

由(i)和(16.1)知

$$E\{X(y) - X(s,v)|\mathscr{F}_{s,v}\} = 0. \qquad (16.3)$$

(16.2)减(16.3)得

$$E\{X(u,t) - X(s,t)|\mathscr{F}_{s,v}\} = 0.$$

令 $v\to+\infty$，注意到 $\bigvee_{v\in T_+^{(2)}} \mathscr{F}_{s,v}=\mathscr{F}^1_s$，由定理 2.6 得

$$E\{X(u,t) - X(s,t)|\mathscr{F}^1_s\} = 0.$$

因此 X 是 1 鞅. 类似证 X 是 2 鞅.

由于或者 $X(D_1)$ 为 $\mathscr{F}^*_{z_2}$ 可测，或者 $X(D_2)$ 为 $\mathscr{F}^*_{z_1}$ 可测，两者中至少成立一个，不妨设前者成立，由 $\mathscr{F}^i_z\subset\mathscr{F}^*_{z_2}$，得

$$E\{X(D_1)X(D_2)|\mathscr{F}^i_z\}$$
$$= E\{E[X(D_1)X(D_2)|\mathscr{F}^*_{z_2}]|\mathscr{F}^i_z\}$$
$$= E\{X(D_1)E[X(D_2)|\mathscr{F}^*_{z_2}]|\mathscr{F}^i_z\} = 0.$$

后一等式利用了 X 的强鞅性. ∎

2.17 定理 $X=\{X(z),z\in T^2_+\}$是弱鞅的充分必要条件是：X 有分解 $X=X^1+X^2$，其中 $X^i=\{X^i(z),z\in T^2_+\}$是 i 鞅，$i=1,2$.

证 因 i 鞅一定是弱鞅，定理的充分性证明显然. 下面证必要性.

对 $y=(u,v),z=(s,t)\in T^2_+,z<y$，令

$$M^1(z) = E\{X(u,t)|\mathscr{F}_z\},M^2(z) = E\{X(s,v)|\mathscr{F}_z\},$$
$$M^0(z) - E\{X(u,v)|\mathscr{F}_z\}.$$

由于$\{X(z),z\in R_y\}$是弱鞅，故

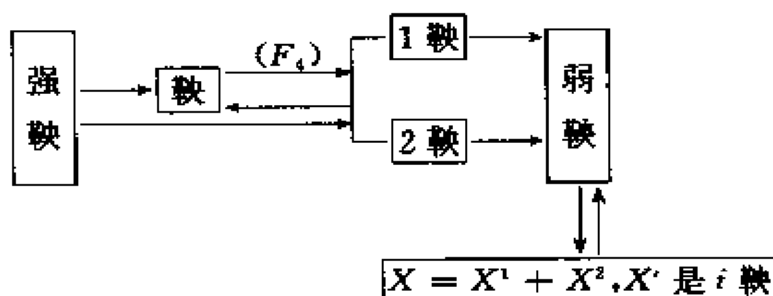
$$E\{X(z,y]|\mathscr{F}_z\} = 0,$$

因而

$$X(z) = M^1(z) + M^2(z) - M^0(z).$$

令 $X^1(z)=M^1(z)$，$X^2(z)=M^2(z)-M^0(z)$，知 X^i 是 i 鞅. ∎

2.18 关系图 综上所述，各种两参数鞅间的关系，可以用下面的框图表示.



§2.3 两参数鞅的轨道正则性

本节中，假定 $T_+^2=R_+^2$，且 $(\mathscr{F}_z, z\in R_+^2)$ 满足通常条件 $(F_1)(F_2)(F_3)$. 设 $X=\{X(z), z\in R_+^2\}$ 是两参数鞅.

设 $\Delta=\left\{\left(\frac{i}{2^n},\frac{j}{2^n}\right): i,j,n \text{ 为正整数}\right\}$. 对 $z\in R_+^2$，令

$$\overline{X}^d(z) = \limsup_{y\in\Delta, y>z, y\to z} X(y), \underline{X}^d(z) = \liminf_{y\in\Delta, y>z, y\to z} X(y).$$

对 $z\in R_+^2-\lambda_0$，令

$$\overline{X}^g(z) = \limsup_{y\in\Delta, y<z, y\to z} X(y), \underline{X}^g(z) = \liminf_{y\in\Delta, y<z, y\to z} X(y).$$

约定 $z\in\lambda_0$ 时，$\overline{X}^g(z)=\underline{X}^g(z)=0$.

对 $A\subset R_+^2$，记号

$$H_A = \bigcup_{z\in A}[0,z], H_A^- = \bigcup_{z\in A}[0,z), H_A^+ = \bigcup_{z\in A}(z,+\infty).$$

对 $B\subset\Omega\times R_+^2$，映象 $L_B: \omega\to\partial H_{B(\omega)}^+$ 称为 B 的初遇. 这里 $B(\omega)$ 是 B 的 ω 截口，∂ 表示集合的边界.

设 L 为停线. 称 L 为可料的，如果 H_L 的示性随机过程 I_{H_L} 是可料的. Bakry[1]证明，对于可料停线 L，存在停线列 $\{L_n\}_{n\geq 0}$ 使

(i) $\forall$ 正整数 n，$H_{L_n}\subset H_{L_{n+1}}\subset H_L$；

(ii) 在集合 $\{(0,0)\in H_L\}$ 上成立 $\bigcup_n H_{L_n}=H_L^-$；

并称 $\{L_n\}$ 预报 L.

2.20 引理 (i) 设 α,β 是两个有理数，则 $A_{\alpha\beta}=\{(z,\omega):\overline{X}^d(z,\omega)\geqslant\alpha,\underline{X}^d(z,\omega)\leqslant\beta\}$ 的初遇 $L_{\alpha\beta}$ 是停线，且满足

$$P\{\pi(\llbracket L_{\alpha\beta}\rrbracket\cap A_{\alpha\beta})\}=P\{\pi(A_{\alpha\beta})\}.$$

这里 π 表示投影，而

$$\llbracket L_{\alpha\beta}\rrbracket=\{(L_{\alpha\beta}(\omega),\omega):\omega\in\Omega\}.$$

(ii) $\underline{X}^g=\{\underline{X}^g(z),z\in R_+^2\}$ 和 $\overline{X}^g=\{\overline{X}^g(z),z\in R_+^2\}$ 是可料过程.

证 (i) 令 $z_{ij}^n=(i2^{-n},j2^{-n}),z=(s,t)$，则可以证明

$$\overline{X}^d(z,\omega)=\limsup_{n\to+\infty}\sum_{i,j}X(z_{i+1,j+1}^n,\omega)I_{(z_{ij}^n,z_{i+1,j+1}^n]}(z)$$

因此 $\forall\ n$，$\overline{X}^d=\{\overline{X}^d(z),z\in R_+^2\}$ 是关于 σ 域族 $\{\mathscr{F}_{s+2^{-n},t+2^{-n}},(s,t)\in R_+^2\}$ 强可测的，从而 $\overline{X}^d(z)$ 关于 $\{\mathscr{F}_z,z\in R_+^2\}$ 是强可测的. 同理可证，$\underline{X}^d=\{\underline{X}^d(z),z\in R_+^2\}$ 关于 $\{\mathscr{F}_z,z\in R_+^2\}$ 也是强可测的. 故集合 $A_{\alpha,\beta}$ 强可测，从而 $L_{\alpha,\beta}$ 是停线. 由于集合 $A_{\alpha,\beta}$ 对固定 ω 截口 $A_{\alpha\beta}(\omega)$ 是右下闭的集合. 因此，对某 $\omega\in\Omega$，若截口 $A_{\alpha,\beta}(\omega)$ 非空，则 $\llbracket L_{\alpha,\beta}\rrbracket\cap A_{\alpha,\beta}$ 的截口亦必非空，即有

$$P\{\pi(\llbracket L_{\alpha,\beta}\rrbracket\cap A_{\alpha,\beta})\}=P\{\pi(A_{\alpha,\beta})\}.$$

(ii) 由于

$$\overline{X}^g(z)=\limsup_{n\to+\infty}\sum_{i,j}X(z_{ij}^n)I_{(z_{ij}^n,z_{i+1,j+1}^n]}(z),$$

因此 $\overline{X}^g$ 必是可料过程，同理 $\underline{X}^g$ 也是可料过程. ∎

下面的引理 2.21 至引理 2.24 中，均设 $X\in\mathscr{M}^2$，而 $\mathscr{M}^2$ 是平方可积两参数鞅空间. 即 $X\in\mathscr{M}^2$ 是右连续鞅，且 L^2 有界即 $\sup_{z\in R_+^2}E|X(z)|^2<\infty$. Borel 可测过程 Φ 关于 X 的随机积分记为 $\Phi.\ X$.

2.21 引理 (i) 如果 Φ 是一个左连续、适应的有界随机过程，记 $\Phi^*=\sup_{z\in R_+^2}|\Phi(z)|$，则 $\forall\ z\in R_+^2$，有

$$I_{\{\Phi^*=0\}}(\Phi.\ X)(z)=0.$$

(ii) 设 L 是 R_+^2 中停线，$D=H_L$，记 $X(D)=(I_D.X)_\infty$，则$\forall z \in R_+^2$，有

$$I_{\{z\in D\}}X(D\cap R_z) = I_{\{z\in D\}}X(z),$$

$$I_{\{z\notin D\}}X(D\cap U_z^0) = 0.$$

证 (i) 由于 Φ 是左连续、适应、有界的，故 $\Phi(z,\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(z,\omega)$，其中

$$\psi_n(z) = \sum_{i,j}\Phi(z_{ij}^n)I_{(z_{ij}^n,z_{i+1,j+1}^n]}(z).$$

是有界可料的，由随机积分的定义知，$\forall z\in R_+^2$，有

$$I_{\{\Phi^*=0\}}(\psi_n.X)(z) = 0,$$

$$(\Phi.X)(z) = \lim_{n\to\infty}(\psi_n.X)(z)$$

其中极限按 L^2 收敛意义，由此即推出

$$I_{\{\Phi^*=0\}}(\Psi.X)(z) = 0.$$

(ii) 由于 I_D 是左连续、适应、有界，则 $(I_{R_z}-I_{D\cap R_z})$ 也左连续、适应、有界，依随机积分性质，我们有

$$I_{\{z\in D\}}X(z) - I_{\{z\in D\}}X(D\cap R_z)$$

$$= I_{\{z\in D\}}(I_{R_z}.X - I_{D\cap R_z}.X)_\infty$$

$$= I_{\{z\in D\}}[(I_{R_z} - I_{D\cap R_z}).X]_\infty.$$

令 $\Phi(z)=I_{R_z}-I_{D\cap R_z}$，由于 $(\Phi^*=0)=(z\in D)$，依 (i) 有

$$I_{\{z\in D\}}X(z) = I_{\{z\in D\}}X(D\cap R_z).$$

同理可证

$$I_{\{z\notin D\}}X(D\cap U_z^0) = 0. \quad \blacksquare$$

引理 2.22 设 L 是停线，$D=H_L$，则存在 $(\mathscr{F}_s^1, s\geq 0)$ 鞅 $Y^1=\{Y^1(s),s\geq 0\}$ 和$(\mathscr{F}_t^2,t\geq 0)$ 鞅 $Y^2=\{Y^2(t),t\geq 0\}$，它们均 L^2 有界、右连左极，且满足

(i) $Y^1(\infty)=Y^2(\infty)=X(D)$.

(ii) $\forall z=(s,t)\in R_+^2$，有

$$Y^1(s)+Y^2(t)+X(D^c\cap R_z)+X(D\cap U_z^0)$$

$$=X(D)+X(z).$$

证 令

$$D^1(s) = D\bigcap R_s^1, D^2(t) = D\bigcap R_t^2, Y^{10}(s) = X[D^1(s)],$$
$$Y^{20}(t) = X[D^2(t)]$$

Y^{i0}是 L^2 有界的 $(\mathscr{F}_z^i)$ 单参数鞅，且满足 $Y^{i0}(\infty) = X(D), i = 1, 2$. 取 Y^{i0}的右连左极修正 Y^i，则结论 (ii) 是下式的推论，而下式显然成立：

$$I_{D\cap U_z^0} + I_{D\cap R_s^1} + I_{D\cap R_t^2} + I_{D^c\cap R_z} = I_D + I_{R_z}$$

其中 $\quad U_z^0 = (z, \infty)$. ∎

2.23 引理 对所有停线 L，都有

$$P\{\text{存在 } z \in L \text{ 使 } \overline{X}^d(z) \neq \underline{X}^d(z)\} = 0.$$

证 令 $D = H_L$，则存在一列停线 $(L_n, n\geqslant 0)$ 使$\forall n$，有

$$D_{n+1} \subset D_n,\ D \subset D_n^0,\ \bigcap_m D_m = D,$$

其中 $D_n = H_{L_n}$，$D_n^0 = H_{L_n}$. 于是我们可选一列增加的正整数序列 $\{n_k, k\geqslant 1\}$，使得

$$E\left\{\int I_{D_{n_k}-D}(z)d<X>_z\right\}\leqslant \frac{1}{k^4}.$$

记 $X_n^* = \sup\limits_{z\in Q_+^2} X[(D_n - D)\bigcap R_z]$, Q_+^2是 R_+^2 中的有理数集. 注意到 $X[(D_n - D)\bigcap R_z]$ 是鞅，我们有

$$\begin{aligned}E|X_{n_k}^*|^2 &= E|\sup_{z\in Q_+^2} X[(D_{n_k} - D)\bigcap R_z]|^2\\ &\leqslant \left(\frac{2}{2-1}\right)^4 \sup_z E|X[D_{n_k} - D)\bigcap R_z]|^2\\ &\leqslant 16E\left\{\int I_{D_{n_k}-D}(z)\ d<X>_z\right\}\leqslant 16/k^4.\end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{k^4}P\left\{(X_{n_k}^*)^2 \geqslant \frac{1}{k^4}\right\}\leqslant \int_{\left[(X_{n_k}^*)^2\geqslant\frac{1}{k^2}\right]} (M_{n_k}^*)^2 dP \leqslant \frac{16}{k^4},$$

$$P\{X_{n_k}^* \geqslant \frac{1}{k}\}\leqslant 16/k^2,\ \sum_k P\{X_{n_k}^* \geqslant \frac{1}{k}\} < \infty.$$

因此 $X_{n_k}^*\to 0$, a. s.. 令 N^1 为使 $X_{n_k}^*$极限不成立的集合，则$P(N^1) = 0$. 对停线 L，按引理 2.2 中构造 Y^i，并设

$$N^2 = \{\text{存在 } z \in Q_+^2 \text{ 使 } Y^1(s) + Y^2(t) + X(D^c \bigcap R_z) +$$

$$X(D\cap U_z^0)\neq X(D)+X(z)\}.$$

由引理 2.22 知 $P(N^2)=0$. 令

$$N^3=\{存在\ z\in Q_+^2\ 及\ k,使\ X(D\cap U_z^0)I_{\{z\notin D\}}\neq 0$$

$$或[X(D^c\cap D_{n_k}\cap R_z)-X(D^c\cap R_z)]I_{\{z\in D\}}\neq 0\}.$$

由引理 2.21 知 $P(N^3)=0$. $\forall\ z=(s,t)\in R_+^2$,令 $Y(z)=Y^1(s)+Y^2(t)+X(D)$. 下面证,若 $\omega\notin N^1\cup N^2\cup N^3$, $z\in L(\omega)$, $z_m\in\triangle$, $z_m>z$, $z_m\to z$, 则 $X(z_m,\omega)\to Y(z,\omega)$. 实际上, 如 $z_m=(s_m,t_m)$, 有

$$X(z_m)-Y(z)=Y^1(s_m)-Y^1(s)+Y^2(t_m)$$
$$-Y^2(t)+X(D^c\cap R_{z_m}).$$

固定 $\epsilon>0$, 由于每个 Y^i 右连续, 故存在正整数 M, 使 $m\geqslant M$ 时有

$$|Y^1(s_m)+Y^2(t_m)-Y^1(s)-Y^2(t)|\leqslant\epsilon/2.$$

取 k 使 $X_{n_k}^*\leqslant\epsilon/2$, 并取 M_1 使 $m\geqslant M_1$ 时有 $z_m\in D_{n_k}$. 因此当 $m\geqslant M_1$ 时, $|X(D^c\cap R_{z_m})|\leqslant X_{n_k}^*\leqslant\epsilon/2$. 由此即得所证. ∎

2.24 引理 设 L 是可料停线, 且 $L\subset(R_+^*)^2$, 这里 $R_+^*=[0,\infty]$, $(R_+^*)^2=R_+^*\times R_+^*$. 则 $P\{存在\ z\in L,使\ \overline{X}^g(z)\neq\underline{X}^g(z)\}=0$.

证 设 L_k 预报 L, 令 $D^k=H_{L_k}$, $D^0=H_L$. 我们有 $\bigcap_k(D^0-D^K)=\varnothing$, $a.s.$, 故 D^0 可料. 由引理 2.22 知, 每一停线 L_k 联系两个单参数鞅 Y^{ik}, 如 $k'>k$, 有

$$E[Y^{ik}(\infty)-Y^{ik'}(\infty)]^2=E\left\{\int I_{D^k-D^{k'}}d<X>_z\right\}.$$

且当 $k\to\infty$, $k'\to\infty$ 时, 上式 $\to 0$. 因此, 对 $i=1,2$, $\{Y^{ik}(\infty),k\geqslant 1\}$ 作为空间 L^2 中柯西序列, 依 L^2 收敛于某随机变量 ξ^i. 记 $E(\xi^i|\mathscr{F}_s^i)$ 的右连左极修正为 Y^i, 并令

$$(Y^{ik}-Y^i)^*=\sup_s|Y^{ik}(s)-Y^i(s)|,$$

则 $E|(Y^{ik}-Y^i)^*|^2\to 0(k\to\infty)$. 由此可选 $\{L_k\}$ 的子列, 不妨仍记为 (L_k), 使得

$$(Y^{ik}-Y^i)^*\to 0,a.s.$$

记

$$N^1 = \{\omega: 存在 i 使 (Y^{ik} - Y^i)^*(\omega) \nrightarrow 0, k \to \infty\},$$

则 $P(N^1)=0$. 对 $z=(s,t)$,令

$$Y(z) = Y^1(s-) + Y^2(t-) - X(D^0),$$

$$N_{kz} = (z \notin D^k) \cap [Y^{1k}(s) + Y^{2k}(t) + X(R_z - D^k) \neq X(z) + X(D^k)],$$

则由引理 2.21 和引理 2.22(ii)知,$\forall$ k 和 $z \in R_+^2$,有 $P(N_{kz})=0$.

记 $N^2 = \bigcup_{k \in N, z \in Q_+^2} N_{kz}$,注意到 $k\to\infty$时,$X(D^0-D^k) \xrightarrow{L^2} 0$,因此

$$E\{\sup_{z \in Q_+^2} |X[(D^0 \cap R_z) - D^k]|^2\} \to 0, k \to \infty.$$

可选取(L_k)的一新子列,仍记为(L_k),使得 $k\to\infty$时,

$$\sup_{z \in Q_+^2} |X[(D^0 \cap R_z) - D^k]| \longrightarrow 0, a.s.$$

$$X(D^0 - D^k) \longrightarrow 0, a.s.$$

记 N^3 为使上面二式不成立的 ω 的集合. 记

$$N^4 = \{存在 k, 使 X(D^0 - D^k) \neq X(D^0) - X(D^k)\},$$

则 $P\{N^1 \cup N^2 \cup N^3 \cup N^4\}=0$.

往证:如 $\omega \notin N^1 \cup N^2 \cup N^3 \cup N^4$, $z \in L(\omega)$, $z_n \in \Delta$, $z_n < z$, $z_n \uparrow z$,则 $X(z_n,\omega) \to Y(z,\omega)$.

事实上,令 $z_n=(s_n,t_n)$, $z=(s,t)$, $\varepsilon>0$. 对 $k \geqslant k_1$,

$$\sup_{z \in Q_+^2} |X[(D^0 - R_z) - D^k]| + |X(D^0 - D^k)| \leqslant \varepsilon/3.$$

对于 $n \geqslant n_1$,有 $z_n \in D^0 - D^{k_1}$,因此

$$X(z_n) = Y^{1k_1}(s_n) + Y^{2k_2}(t_n) + X(R_{z_n} - D^{k_1}) - X(D^{k_1}).$$

由此得到

$$-X(z_n) + Y(z) = Y^1(s-) - Y^1(s_n) + Y^2(t-) - Y^2(t_n) + Y^1(s_n) - Y^{1k_1}(s_n) + Y^2(t_n) - X(D^0 - D^{k_1}) - X(R_{z_n} - D^{k_1}).$$

对于 $n \geqslant n_1$,有

$$|X(R_{z_n} - D^{k_1})| + |X(D^0 - D^{k_1})| \leqslant \epsilon/3.$$

对于 $n \geqslant n_2$，有

$$|Y^1(s-) - Y^1(s_n)| + |Y^2(t-) - Y^2(t_n)| \leqslant \epsilon/3.$$

对于 $n \geqslant n_3$，有

$$|Y^1(s_n) - Y^{1k_1}(s_n)| + |Y^2(t_n) - Y^{2k_1}(t_n)| \leqslant \epsilon/3.$$

由此推得，当 $n \geqslant \max(n_1, n_2, n_3)$时，有

$$|X(z_n) - Y(z)| \leqslant \epsilon. \qquad \blacksquare$$

2.25 定理 设$X = \{X(z), z \in R_+^2\}$是$L^2$有界鞅，则$X$有右连续的灯函数修正.

证 设$\alpha > \beta \geqslant 0$. 令$A = \{(z, \omega): \overline{X}^d(z, \omega) \geqslant \alpha, \underline{X}^d(z, \omega) \leqslant \beta\}$. 由引理 2.20(i)知$A$的初遇$L_A$是停线，且$P(A) = P\{$存在$z \in L_A$，使$\overline{X}^d(z) \geqslant \alpha, \underline{X}^d(z) \leqslant \beta\}$. 由引理 2.23 知$P(A) = 0$，由此推得$X$沿△除了一个零测集外均存在极限. 记$X^+(z)$为$X(y)$沿△在$z$点的右极限值，极限不存在时令$X^+(z) = 0$. 则过程$X^+ = \{X^+(z), z \in R_+^2\}$是$X$的一个修正. 实际上，对固定的$z \in R_+^2$，设$z_n \in \triangle, z_n \downarrow z$. 由于$X$是平方可积鞅，故$X(z_n) \xrightarrow{L^2} X(z)$. 但$X(z_n) \xrightarrow{a.s.} X^+(z)$，故$X(z) = X^+(z)$, a.s.. 显然，$X^+$是右连续鞅.

现在证明：除一零概率集外，当沿$z \in \Delta$取极限时X是灯函数. 令$B = \{(z, \omega): \overline{X}^g(z, \omega) \neq \underline{X}^g(z, \omega)\}$. 由引理 2.20 (ii) 知$B$是可料集. 由可料截口定理知存在弱停线$\lambda$，满足$[\![\lambda]\!] \subset B$，且$L_{[\![\lambda]\!]}$可料，使对任$\epsilon > 0$，$P\{\pi(B)\} \leqslant P(\lambda \neq \varnothing) + \epsilon$. 再利用引理 2.24 推得$P\{\pi(B)\} = 0$，即，$X$沿$z \in \Delta$取极限时左极限存在，从而对$X^+$亦然. 但$X^+$右连续，故$X^+$的轨道左极限存在. 类似证明除了左、右极限外的其他两个极限存在. 从而X^+的轨道是右连续灯函数. $\blacksquare$

2.26 定理 (Bakry) 设X是两参数鞅，$\forall z \in R_+^2$，有$E\{|X(z)| \log^+ |X(z)|\} < +\infty$，则$X$有右连左极修正.

证 只证X在点z的右连续性及$X_3(z)$的存在性，至于$X_2(z)$和$X_4(z)$的存在性证明，需要涉及某些 Amart 理论及其他

方面的知识，有兴趣的读者可参见Bakry[1]以及 Millet 和 Sucheston 的 [1].

记 $\Phi(x) = |x|\log^+ |x|$，则 Φ 是 R_+上的增、凸函数，$\forall\ (x, y) \in R^2$，有 $\Phi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \Phi(x) + \Phi(y)$. 为方便计，限制 X 在 $R_{(z,n)}$ 上，因此下面不妨设 $\sup\limits_{z\in R_+^2} E\{\Phi[X(z)]\} < \infty$.

由于 X 存在尾随机变量 $X(\infty)$，$X(z) \xrightarrow{L_1} X(\infty)$. 令 $X^n(\infty) = [X(\infty)\wedge n]\vee(-n)$，显然有

$$E\{\Phi[X^n(\infty) - X(\infty)]\} \longrightarrow 0,\ n\to\infty.$$

因此，对任意常数 C，亦有 $E\{\Phi[CX^n(\infty) - CX(\infty)]\} \longrightarrow 0, n \to +\infty$. 由定理 2.25，对于鞅 $E[X^n(\infty)|\mathscr{F}_z]$，存在右连左极修正，记为 $X^n(z)$. 由 Jensen 不等式有

$$\begin{aligned}
&E\{\Phi[X^n(z) - X(z)]\}\\
&= E\{\Phi[E(X^n(\infty)|\mathscr{F}_z) - E(X(\infty)|\mathscr{F}_z)]\}\\
&= E\{\Phi[E(X^n(\infty) - X(\infty)|\mathscr{F}_z)]\}\\
&\leqslant E\{\Phi[X^n(\infty) - X(\infty)]\} \to 0.
\end{aligned}$$

可以选取 X^n 的子列，仍记为 X^n，使得有

$$E\{\Phi[4^m(X^{m+1}(\infty) - X^m(\infty))]\} \leqslant 1.$$

记 $M(z) = 4^m|X^{m+1}(z) - X^m(z)|$，$M$ 是正下鞅，利用 Doob-Cairoli 不等式有

$$\alpha P\{\sup_z M(z) \geqslant \alpha^{-1}\} \leqslant \frac{e}{e-1} + \frac{e}{e-1}\sup_z E\{M(z)\log^+ M(z)\}.$$

而

$$\begin{aligned}
&\sup_z E\{M(z)\log^+ M(z)\} = \sup_z E|\Phi[M(z)]|\\
&= \sup_z E|\Phi\{4^m[X^{m+1}(z) - X^m(z)]\}|\\
&\leqslant \sup_z E|\Phi\{4^m[X^{m+1}(\infty) - X^m(\infty)]\}| \leqslant 1.
\end{aligned}$$

取 $\alpha = 2^m$，$a = 2e/(e-1)$，则有

$$P\left\{\sup_{z\in R_+^2} |X^{m+1}(z) - X^m(z)| \geqslant \frac{1}{2^m}\right\} \leqslant a/2^m.$$

由 Borel-Cantalli 引理知，$X^n(z)$ 一致收敛于某随机变量 $Y(z)$，因 X^n 是右连左极过程，故 Y 也是．另一方面，由于 $E\{\Phi[X^n(z)-X(z)]\}\to 0$，推得 $E\{|X^n(z)-X(z)|\}\to 0$，故 Y 也是 X 的右连左极修正． ∎

§2.4 两参数逆鞅

为了研究 Brown 单的一个有趣性质——Harness 性，并用 Harness 性来刻划 Brown 单，Dozzi[1]引进了两参数逆鞅的概念．在研究两参数过程的 Harness 性并刻划两参数过程中，两参数逆鞅起着很大的作用．

设 $X=\{X(z),z\in R_+^2\}$ 是两参数过程．$\mathscr{G}=\{\mathscr{G}_z,z\in R_+^2\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的下降子 σ 域族．类似地可定义 σ 域 $\mathscr{G}_z^1$，$\mathscr{G}_z^2$，$\mathscr{G}_z^*$ 等．X 称为适应的，如 $\forall\, z\in R_+^2$，$X(z)$ 为 $\mathscr{G}_z$ 可测．

2.27 定义　可积过程 X 称为

(i) 逆强鞅，如 $\forall\, z<y$，有

$$E\{X(z,y]\,|\,\mathscr{G}_y^*\}=0.$$

(ii) 逆 1 鞅，如 $\forall\, z=(s,t)\in R_+^2,u>s$，有

$$E\{X(s,t)-X(u,t)\,|\,\mathscr{G}_{(u,t)}^1\}=0.$$

类似定义数 2 鞅：如 $\forall\, z=(s,t)\in R_+^2,v>t$，有

$$E\{X(s,t)-X(s,v)\,|\,\mathscr{G}_{(s,v)}^2\}=0.$$

(iii) 逆鞅，如 $\forall\, z\leqslant y$，有

$$E\{X(z)-X(y)\,|\,\mathscr{G}_y\}=0.$$

(iv) 逆弱鞅，如 $\forall\, z<y$，有

$$E\{X(z,y]\,|\,\mathscr{G}_y\}=0.$$

2.28 定义　称 $\{\mathscr{G}_z,z\in R_+^2\}$ 满足条件 (G_4)，如 $\forall\, z\in R_+^2$，有 $(\mathscr{G}_z^1,\ \mathscr{G}_z^2\,|\,\mathscr{G}_z)$．

2.29 定理　设 X 是逆强鞅，初值为零．则 X 是逆鞅，逆 i 鞅，$i=1,\ 2$．

证　因 $\forall\, z=(s,t)\leqslant y=(u,v)$，有

$$E\{X(z)-X(y)|\mathscr{G}_y\}$$
$$=-E\{E[X((0,t),z\otimes y]|\mathscr{G}^*_{z\otimes y}]\cdot\mathscr{G}_y\}$$
$$-E\{E[X((s,0),y]|\mathscr{G}^*_y]|\mathscr{G}_y\}=0,$$
$$E\{X(s,t)-X(u,t)|\mathscr{G}^1_{(u,t)}\}$$
$$=-E\{E[X((s,0),(u,t)]|\mathscr{G}^*_{(u,t)}]|\mathscr{G}^1_{(u,t)}\}=0.$$

所以 X 是逆鞅，逆 1 鞅. 类似证 X 是逆 2 鞅. ∎

2.30 定理 (i) 设 X 为逆鞅，如$\forall\ s,t\in[0,\infty]$, $X(s,\infty)=X(\infty,t)=0$, $a.s.$, 则 X 为逆 i 鞅, $i=1,2$.

(ii) 设 X 既是逆 1 鞅，又是逆 2 鞅，则 X 是逆鞅. 反之，设 X 为 $(\mathscr{G}_z, z\in R^2_+)$ 适应逆鞅，且条件 (G_4) 成立，则 X 是逆 i 鞅，$i=1$, 2.

证 (i) 设 $z=(s,t)\in R^2_+, u>s$, 则

$$E\{X(s,t)-X(u,t)|\mathscr{G}^1_{(u,t)}\}=E\{E[X((s,t),$$
$$(u,\infty)]|\mathscr{G}^*_{(u,\infty)}]|\mathscr{G}^1_{(u,t)}\}=0,$$

故 X 是逆 1 鞅，类似证逆 2 鞅.

(ii) 设 $z\leqslant y$, 则

$$E\{X(z)-X(y)|\mathscr{G}_y\}$$
$$=E\{E[X(z)-X(z\otimes y)|\mathscr{G}^2_{z\otimes y}]|\mathscr{G}_y\}$$
$$+E\{E[X(z\otimes y)-X(y)|\mathscr{G}^1_y]|\mathscr{G}_y\}=0.$$

故 X 是逆鞅. 相反地，由 (G_4), $\forall\ z=(s,t)\in R^2_+, u>s$, 有

$$E\{X(s,t)-X(u,t)|\mathscr{G}^1_{(u,t)}\}$$
$$=E\{X(s,t)-X(u,t)|\mathscr{G}_{(u,t)}\}=0,$$

故 X 是逆 1 鞅，类似证逆 2 鞅. ∎

2.31 定理 设 X 是逆鞅，则 X 是逆弱鞅.

证 $\forall\ z<y$, 有

$$E\{X(z,y]|\mathscr{G}_y\}$$
$$=-E\{E[X(0,0)-X(z)|\mathscr{G}_z]|\mathscr{G}_y\}$$
$$+E\{E[X(0,0)-X(z\otimes y)|\mathscr{G}_{z\otimes y}]|\mathscr{G}_y\}$$
$$+E\{E[X(0,0)-X(y\otimes z)|\mathscr{G}_{y\otimes z}]|\mathscr{G}_y\}$$
$$-E\{X(0,0)-X(y)|\mathscr{G}_y\}=0.$$

故 X 是逆弱鞅. ∎

2.32 定理 设 X 是逆 1 鞅或逆 2 鞅，则 X 是逆弱鞅. 反之，若 X 为 $\{G_z, z\in R_+^2\}$ 适应逆弱鞅，条件 (G_4) 成立，X 有初值 0，则 X 为逆 i 鞅，$i=1, 2$.

证 设 X 是逆 1 鞅. 则$\forall\ z<y$,

$$
\begin{aligned}
& E\{X(z,y]|\mathscr{G}_y\} \\
= & E\{E[X(z)-X(y\otimes z)|\mathscr{G}^1_{y\otimes z}]|\mathscr{G}_y\} \\
& - E\{E[X(z\otimes y)-X(y)|\mathscr{G}^1_y]|\mathscr{G}_y\}=0.
\end{aligned}
$$

故 X 是逆弱鞅. X 为逆 2 鞅的情形，证明类似. 反之，设 X 是适应逆弱鞅，条件 (G_4) 满足，X 的初值为 0，则 $\forall\ z=(s,t)\in R_+^2$，$u>s$，有

$$
\begin{aligned}
& E\{X(s,t)-X(u,t)|\mathscr{G}^1_{(u,t)}\} \\
= & E\{E[X(s,t)|\mathscr{G}^2_{(u,t)}]|\mathscr{G}^1_{(u,t)}\}-X(u,t) \\
= & E\{E[X(s,t)|\mathscr{G}^1_{(u,t)}]|\mathscr{G}^2_{(u,t)}\}-X(u,t) \\
= & E\{E[X(s,t)|\mathscr{G}^1_{(u,t)}]|\mathscr{G}_{(u,t)}\}-X(u,t) \\
= & E\{X(s,t)\quad X(u,t)|\mathscr{G}_{(u,t)}\} \\
= & -E\{X((s,0),(u,t)]|\mathscr{G}_{(u,t)}\} \\
= & 0.
\end{aligned}
$$

故 X 为适应逆 1 鞅. 类似证 X 为适应逆 2 鞅. ∎

2.32 定理 设条件 (G_4) 满足. 则 X 为适应逆鞅的充要条件是: $\forall\ z\in R_+^2$, 有

$$
X(z)=X^1(z)+X^2(z),\ a.s.
$$

其中 X^i 为适应逆 i 鞅，$i=1, 2$.

证 由定理 2.31 知充分性显然. 往证必要性. 令 $X^1(s,t)=E\{X(0,t)|\mathscr{G}_{(s,t)}\}$，由条件 (G_4),

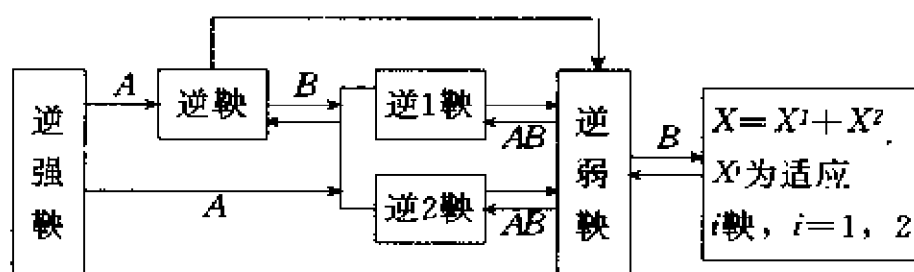
$$
\begin{aligned}
& X^1(s,t)=E\{E[X(0,t)|\mathscr{G}^1_z]|\mathscr{G}_z\} \\
= & E\{E[X(0,t)|\mathscr{G}^1_z]|\mathscr{G}^2_z\} \\
= & E\{X(0,t)|\mathscr{G}^1_z\}.
\end{aligned}
$$

故 X^1 是适应逆 1 鞅. 令 $X^2(z)=X(z)-X^1(z)$，则 $\forall\ z=(s,t)\in R_+^2$，$v>t$，有

$$
\begin{aligned}
& E\{X^2(s,t) - X^2(s,v) \mid \mathscr{G}^2_{(s,v)}\} \\
=& -E\{X^2(s,v) - X^2(s,t) \mid \mathscr{G}_{(s,v)}\} \\
=& -E\{X((0,t),(s,v)] \mid \mathscr{G}_{(s,v)}\} = 0.
\end{aligned}
$$

故 X^2 为适应 2 鞅. ∎

2.33 关系图 综上所述，我们有下面的两参数逆鞅关系图，其中：条件 A 表示 X 有零初值；条件 B 表示 X 适应且条件 (G_4) 成立.



第2篇

两参数马尔可夫过程的基本理论

3 各种两参数马尔可夫性

我们讨论两参数随机过程

$$X=(\Omega,\mathscr{F},P;E,\mathscr{E};\mathscr{F}_z,X(z),z\in T_+^2)$$

的马氏性，这里$T_+^2=Z_+^2$或R_+^2. 所谓马氏性，是指系统的运动具有某种弱相关性. 具体地说，系统的运动状态具有“已知现在的条件下，将来与过去无关”的性质. 对于单参数情形，由于时间集是全序集，“过去”、“现在”和“将来”的次序是分明的. 对于两参数集的情形，由于“时间”集合T_+^2是半序集，因而，对“过去”、“现在”和“将来”有各种不同的理解，从而定义出各种不同的马氏性. 我们将给出两参数过程的各种马氏性的定义，例如，单点马氏性，宽过去马氏性，宽将来马氏性，1 马氏性，2 马氏性，* 马氏性，Levy 马氏性等，然后讨论它们之间的关系，得到各种马氏性之间的关系图.

本章中，均设$(\mathscr{F}_z,z\in T_+^2)$是预先给定的子$\sigma$域族，满足通常条件，两参数过程$X=\{X(z),z\in T_+^2\}$是适应的，$X$的马氏性都是关于$(\mathscr{F}_z,z\in T_+^2)$而言，除非特别说明.

§3.1 单点马氏性

3.1 定义 称过程$X=\{X(z),z\in T_+^2\}$具有单点马氏性，如果$\forall\ z,\ y\in T_+^2,\ z\leqslant y,\ f\in b\mathscr{E}$，有

$$E\{f[X(y)]|\mathscr{F}_z\}=E\{f[X(y)]|X(z)\}. \tag{1.1}$$

3.2 定理 X具有单点马氏性的充分必要条件是：$\forall\ z,\ y\in T_+^2,\ z\leqslant y,\ A\in\mathscr{E}$，有

$$P\{X(y) \in A | \mathscr{F}_z\} = P\{X(y) \in A | X(z)\}. \qquad (2.1)$$

证 在 (1.1) 中令 $f=I_A$ 而得 (2.1). 往证充分性. 令

$$\mathscr{H} = \{f: f \text{ 使}(1.1) \text{ 成立}\},$$

易知，$\mathscr{H}$ 是线性空间，且对 π 系 $\mathscr{C}=\mathscr{E}$ 满足定理 1.4 (i) (ii) (iii)，从而 $\mathscr{H}$ 包含 $\sigma(\mathscr{C})-\mathscr{E}$ 可测的 $f\in b\mathscr{E}$. ∎

§3.2 宽过去马氏性

3.3 定义 称过程 X 具有宽过去马氏性或三点马氏性，如果 $\forall z\in T_+^2$，z_1，z_2，…，$z_n\in R_z^{*c}$，$f\in b\mathscr{E}^n$，有

$$\begin{aligned}&E\{f[X(z_1),\cdots,X(z_n)]|\mathscr{F}_z^*\}\\ =&E\{f[X(z_1),\cdots,X(z_n)]|X(z),X(z\otimes z_k),X(z_k\otimes z),\\ &1\leqslant k\leqslant n\}. \qquad (3.1)\end{aligned}$$

3.4 定理 X 具有宽过去马氏性的充要条件是：$\forall z\in T_+^2$，$y\in R_z^{*c}$，$f\in b\mathscr{E}$，有

$$\begin{aligned}&E\{f[X(y)]|\mathscr{F}_z^*\}=E\{f[X(y)]|X(z),\\ &X(z\otimes y),X(y\otimes z)\}. \qquad (4.1)\end{aligned}$$

证 必要性明显. 用归纳法证充分性. 由 (4.1) 知 (3.1) 对 $n=1$ 成立. 设 (3.1) 对 $n\leqslant k-1$ 成立，往证 $n=k$ 时成立. 由单调类定理，只需对 $f=\prod\limits_{i=1}^{k}f_i$ 证明 (3.1)，$f_i\in b\mathscr{E}$. 设 $z=(s,t)\in T_+^2$，$z_i=(s_i,t_i)\in R_z^{*c}$，$1\leqslant i\leqslant k$. 于是，只要证明

$$E\{\prod_{i=1}^{k}f_i[X(s_i,t_i)]|\mathscr{F}_{s,t}^*\} \qquad (4.2)$$

是 $\mathscr{A}\equiv\sigma\{X(s,t),X(s,t_i),X(s_i,t),1\leqslant i\leqslant k\}$ 可测的.

不失一般性，可设 $s_1=\bigwedge\limits_{i=1}^{k}s_i$. 于是 $\mathscr{F}_{s,t}^*\subset\mathscr{F}_{s_1,t}^*$，$f_1[X(s_1,t_1)]$ 为 $\mathscr{F}_{s_1,t}^*$ 可测，故

$$E\{\prod_{i=1}^{k}f_i[X(s_i,t_i)]|\mathscr{F}_{s,t}^*\}$$

$$= E(E\{\prod_{i=1}^{k} f_i[X(s_i,t_i)] | \mathscr{F}^*_{s_1,t}\} | \mathscr{F}^*_{s,t})$$

$$= E(f_1[X(s_1,t_1)]E\{\prod_{i=2}^{k} f_i[X(s_i,t_i)] | \mathscr{F}^*_{s_1,t}\} | \mathscr{F}^*_{s,t}).$$

由归纳假设，上式等于

$$E(f_1[X(s_1,t_1)]E\{\prod_{i=2}^{k} f_i[X(s_i,t_i)] | X(s_1,t), X(s_1,t_i),$$
$$X(s_i,t), 2 \leqslant i \leqslant k\} | \mathscr{F}^*_{s,t}).$$

由 Doob 复合函数定理 1.7，存在有界的 Borel 函数 φ 使上式等于

$$E\{f_1[X(s_1,t_1)]\varphi[X(s_1,t), X(s_1,t_i), X(s_i,t), 2 \leqslant i \leqslant k] | \mathscr{F}^*_{s,t}\}$$

为使上式 $\mathscr{A}$ 可测，由单调类定理，只需证

$$E\{f_1[X(s_1,t_1)]\prod_{i=2}^{k} \varphi_{1i}[X(s_1,t_i)]\prod_{i=1}^{k} \varphi_i[X(s_i,t)] | \mathscr{F}^*_{s,t}\}$$

为 $\mathscr{A}$ 可测，这里，φ_{1i}，$\varphi_i \in b\mathscr{E}$. 因 $\varphi_i[X(s_i, t)]$ 是 $\mathscr{F}^*_{s,t}$可测的，上式等于

$$E\{f_1[X(s_1,t_1)]\prod_{i=2}^{k} \varphi_{1i}[X(s_1,t_i)] | \mathscr{F}^*_{s,t}\}\prod_{i=1}^{k} \varphi_i[X(s_i,t)],$$

从而只需证明上式中条件期望是 $\mathscr{A}$ 可测的，即要证明

$$E\{\prod_{i=1}^{k} g_i[X(s_1,t_i)] | \mathscr{F}^*_{s,t}\}. \tag{4.3}$$

是 $\mathscr{A}$ 可测的，这里 $g_i \in b\mathscr{E}$.

不失一般性，可设 $t_k = \bigwedge_{i=1}^{k} t_i$. 与上面为证(4.2)是 $\mathscr{A}$ 可测，只要证(4.3)是 $\mathscr{A}$ 可测的论证相类似，为证(4.3)是 $\mathscr{A}$ 可测(此时可考虑 $z_i = (s_1,t_i)$)，只需证 $E\{h[X(s_1,t_k)] | \mathscr{F}^*_{s,t}\}$ 为 $\mathscr{A}$ 可测，这里 $h \in b\mathscr{E}$. 而这，只需应用充分性条件(4.1)即可证实. ∎

3.5 定理 过程 X 具有宽过去马氏性的充要条件是：$\forall z \in T^2_+$，$D \subset R^{*'}$，有

$$(\mathscr{F}^*_z, \overset{\circ}{\mathscr{F}}(D) | \overset{\circ}{\mathscr{F}}[\Pi^*_z(D)]). \tag{5.1}$$

证 只需证必要性. 设 X 有宽过去马氏性. 由引理 1.30，为证 (5.1)，只要证对 D 中任意有限个点 z_1，z_2，…，z_n，记 $A=\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}$，有$(\mathscr{F}_z^*,\mathring{\mathscr{F}}(A)\mid\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z^*(D)])$. 注意

$$\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z^*(A)]\subset\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z^*(D)]\subset\mathscr{F}_z^*$$

由定理 1.32 (i)，只要证明

$$(\mathscr{F}_z^*,\mathring{\mathscr{F}}(A)\mid\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z^*(A)])$$

即可. 而此由 (3.1) 得出. ∎

§3.3 宽将来马氏性

3.6 定义 称 X 具有宽将来马氏性，如果 $\forall z\in T_+^2,z_1,z_2,\cdots,z_n\in R_z^c,f\in b\mathscr{E}^n$，有

$$E\{f[X(z_1),\cdots,X(z_n)]\mid\mathscr{F}_z\}$$
$$=E\{f[X(z_1),\cdots,X(z_n)]\mid X(z\wedge z_1),\cdots,X(z\wedge z_n)\}.\tag{6.1}$$

3.7 定理 过程 X 具有宽将来马氏性的充要条件是：$\forall z\in T_+^2$，$D\subset R_z^c$，有

$$(\mathscr{F}_z,\mathring{\mathscr{F}}(D)\mid\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z(D)]).\tag{7.1}$$

证 类似定理 3.5 的证明. ∎

§3.4 *i* 马氏性

设 $T_+^2=T_+^{(1)}\times T_+^{(2)}$，$T_+^{(i)}=Z_+$或$R_+$.

3.8 定义 称过程 X 具有 1 马氏性，如果 $\forall t_1$，t_2，…，$t_n\in T_+^{(2)}$，s，$u\in T_+^{(1)}$，$s\leqslant u$，$f\in b\mathscr{E}^n$，有

$$E\{f[X(u,t_1),\cdots,X(u,t_n)]\mid\mathscr{F}_s^1\}$$
$$=E\{f[X(u,t_1),\cdots,X(u,t_n)]\mid X(s,t_1),\cdots,X(s,t_n)\}.\tag{8.1}$$

3.9 定理 过程 X 具有 1 马氏性的充要条件是：$\forall\ n\geqslant 1$，t_1，…，$t_n\in T_+^{(2)}$，取值于 $(E^n,\mathscr{E}^n)$ 的单参数过程

$$X^1_{t_1,\cdots,t_n}=\{X^1_{t_1,\cdots,t_n}(s),s\in T_+^{(1)}\}. \tag{9.1}$$

关于 $\{\mathscr{F}^1_s,s\in T_+^{(1)}\}$ 是马氏过程，其中 $X^1_{t_1,\cdots,t_n}(s)=(X(s,t_1),\cdots,X(s,t_n))$.

证 由 1 马氏性和单参数马氏性的定义立得. ∎

3.10 定理 过程 X 具有 1 马氏性的充要条件是：$\forall\ s\in T_+^{(1)}$，$D\subset R_s^{1c}$，有

$$(\mathscr{F}^1_s,\overset{\circ}{\mathscr{F}}(D)\,|\,\overset{\circ}{\mathscr{F}}[\Pi^1_s(D)]). \tag{10.1}$$

证 完全类似于定理 3.5 的证明知，我们只要证明：对 D 中任意有限个点 z_1，…，z_n，记 $A=\{z_1,\ \cdots,\ z_n\}$，有

$$(\mathscr{F}^1_s,\overset{\circ}{\mathscr{F}}(A)\,|\,\overset{\circ}{\mathscr{F}}[\Pi_s(A)]). \tag{10.2}$$

过 z_1，…，z_n 作水平及竖直直线，这些直线的交点记为 $B=\{z_{jh}:1\leqslant j\leqslant m,\ 1\leqslant h\leqslant d\}$，由 (8.1) 知

$$(\mathscr{F}^1_s,\overset{\circ}{\mathscr{F}}(B)\,|\,\overset{\circ}{\mathscr{F}}[\Pi^1_s(B)]). \tag{10.3}$$

注意 $\overset{\circ}{\mathscr{F}}[\Pi^1_s(B)]=\overset{\circ}{\mathscr{F}}[\Pi^1_s(A)]$，且 $\overset{\circ}{\mathscr{F}}(A)\subset\overset{\circ}{\mathscr{F}}(B)$，从(10.3)立得(10.2). ∎

对于 2 马氏性，有相应的结果.

3.11 定义 称过程 X 具有 2 马氏性，如果 $\forall\ s_1$，…，$s_n\in T_+^{(1)}$，t，$v\in T_+^{(2)}$，$t\leqslant v$，$f\in b\mathscr{E}^n$，有

$$\begin{aligned}&E\{f[X(s_1,v),\cdots,X(s_n,v)]\,|\,\mathscr{F}^2_t\}\\&=E\{f[X(s_1,v),\cdots,X(s_n,v)]\,|\,X(s_1,t),\cdots,X(s_n,t)\}.\end{aligned} \tag{11.1}$$

3.12 定理 X 具有 2 马氏性的充要条件是：$\forall\ s_1$，…，$s_n\in T_+^{(1)}$，取值于 $(E^n,\mathscr{E}^n)$ 的单参数过程

$$X^2_{s_1,\cdots,s_n}=\{X^2_{s_1,\cdots,s_n}(t),t\in T_+^{(2)}\}. \tag{12.1}$$

关于 $\{\mathscr{F}^2_t,t\in T_+^{(2)}\}$ 是马氏过程. 这里，$X^2_{s_1,\cdots,s_n}(t)=(X(s_1,t),\cdots,X(s_n,t))$.

3.13 定理 X 具有 2 马氏性的充要条件是：$\forall\, t\in T_+^{(2)}$，$D\subset R_t^{2c}$，有

$$(\mathscr{F}_t^2, \mathring{\mathscr{F}}(D) \mid \mathring{\mathscr{F}}[\Pi_t^2(D)]). \tag{13.1}$$

§3.5 ＊马氏性

对于 $z\in T^2-T_+^2$，补充定义 $\mathscr{F}_z=\{A\in\mathscr{F}: P(A)=0$ 或 $1\}$，$X(z)=$某非随机的函数 $C(z)$. 这样，适应过程 X 已扩充为参数集 T^2 上的两参数适应过程

$$X^* = (\Omega,\mathscr{F},P;E,\mathscr{E};\mathscr{F}_z,X(z),z\in T^2). \tag{13.2}$$

将 T^2 代替 T_+^2 后，§1.1 中引入的记号仍有效. 例如，对 $z=(s,t)\in T^2, R_z=\{y\in T^2: y\leqslant z\}, \Pi_z^1(D)=\Pi_t^1(D)=\{(s,v)\in T^2$：存在 u 使 $(u,v)\in D\}$ 等等.

3.14 定义 称过程 X 具有＊马氏性，如果过程 X^* 具有宽过去马氏性，即$\forall\, z\in T^2$，z_1，…，$z_n\in R_z^{*c}$，$f\in b\mathscr{E}^n$，有 (3.1) 式成立.

完全类似定理 3.4 和定理 3.5 的证明，我们有

3.15 定理 过程 X 具有＊马氏性的充要条件是：$\forall\, z\in T^2$，$y\in R_z^{*c}$，$f\in b\mathscr{E}$，有 (4.1) 成立.

3.16 定理 过程 X 具有＊马氏性的充要条件是：$\forall\, z\in T^2$，$D\subset R_z^{*c}$，有 (5.1) 成立.

§3.6 Levy 马氏性

本节设 $T_+^2=R_+^2$，$X=\{X(z),z\in R_+^2\}$，$D\subset R_+^2$，$D^c=R_+^2-D$，$\overline{D}$，$\overline{D^c}$表示闭包，$\partial D=\overline{D}\cap\overline{D^c}$表示 D 的边界.

3.17 定义 称过程 X 关于 D 具有 Levy 马氏性，如果

$$(\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D}), \mathring{\mathscr{F}}(\overline{D^c}) \mid \mathring{\mathscr{F}}(\partial D)). \tag{17.1}$$

3.18 定义 称过程 X 关于 D 具有宽 Levy 马氏性或芽 Levy

马氏性，如果

$$(\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D}),\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D^c})\,|\,\Sigma(\partial D)). \tag{18.1}$$

其中，O_n^+ 和 O_n^- 分别表示 ∂D 的$\frac{1}{n}$ 内、外邻域（见§1.1），

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma^+(\partial D)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathring{\mathscr{F}}(O_n^+),\Sigma^-(\partial D)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathring{\mathscr{F}}(O_n^-),\\&\Sigma(\partial D)=\Sigma^+(\partial D)\vee\Sigma^-(\partial D).\end{aligned}\right\} \tag{18.2}$$

3.19 定义　称过程 X 关于 D 具有内宽 Levy 马氏性或内芽 Levy 马氏性，如果

$$(\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D}),\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D^c})\,|\,\Sigma^+(\partial D)). \tag{19.1}$$

3.20 定义　称过程 X 关于 D 具有外宽 Levy 马氏性或外芽 Levy 马氏性，如果

$$(\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D}),\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D^c})\,|\,\Sigma^-(\partial D)). \tag{20.1}$$

§3.7　等价关系

3.21 定理　过程X具有宽将来马氏性的充要条件是：X既有1马氏性，又有2马氏性.

证　必要性　. 给定 $s\in T_+^{(1)}$及 t_1，…，$t_n\in T_+^{(2)}$，取 $t>\bigvee_{i=1}^{n}t_i$. 对 $z=(s,t)$，由定义 3.6 可得：当 $s\leqslant u$，$f\in b\mathscr{E}^n$ 时.

$$\begin{aligned}&E\{f[X(u,t_1),\cdots,X(u,t_n)]\,|\,\mathscr{F}_z\}\\&=E\{f[X(u,t_1),\cdots,X(u,t_n)]\,|\,X(s,t_j),1\leqslant j\leqslant n\}.\end{aligned} \tag{21.1}$$

注意上式右方与 t 无关，从而上式中将 $\mathscr{F}_z$ 换成 $\mathscr{F}_{s,t+n}$也成立，而 $\mathscr{F}_{s,t-n}\uparrow\bigvee_{n=1}^{\infty}\mathscr{F}_{s,t+n}=\mathscr{F}_s^1$，故由定理 2.6 知上式左方用 $\mathscr{F}_s^1$ 代替 $\mathscr{F}_z$ 后仍成立，即 X 有 1 马氏性. 类似证 X 具有 2 马氏性.

充分性 $\forall z\in T_+^2$，$D\subset R_z^c$，记

$$D_1=D\cap R_z^1,\ D_2=D\cap R_z^{*c},\ D_3=D\cap R_z^2,$$

则 $D=D_1\cup D_2\cup D_3$. 先考察 $A=D_2\cup D_3\subset R_z^{1c}$. 由于 X 有 1 马氏性，对集 A 利用定理 3.10 得 $(\mathscr{F}_z^1,\mathring{\mathscr{F}}(A)\mid\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z^1(A)])$. 注意到

$$\mathring{\mathscr{F}}(D_1)\vee\mathring{\mathscr{F}}(\Pi_z^2[D_1\cup\Pi_z^1(D_2)])\subset\mathscr{F}_z^1;$$

利用定理 1.36 和注 1.25 得

$$\{\mathscr{F}_z^1,\mathring{\mathscr{F}}(D)\mid\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z^1(A)]\vee\mathring{\mathscr{F}}(D_1)$$

$$\vee\mathring{\mathscr{F}}(\Pi_z^2[D_1\cup\Pi_z^1(D_2)])\}.$$

由于 $\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z(D)]=\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z^1(D_3)]\vee\mathring{\mathscr{F}}(\Pi_z^2[D_1\cup\Pi_z^1(D_2)])$，故

$$\{\mathscr{F}_z^1,\mathring{\mathscr{F}}(D)\mid\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z(D)]\vee\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z^1(D_2)]\vee\mathring{\mathscr{F}}(D_1)\}. \tag{21.2}$$

再考虑 $D_1\cup\Pi_z^1(D_2)\equiv B\subset R_z^{2c}$，由于 X 有 2 马氏性，对集 B 利用定理 3.13 得$(\mathscr{F}_z^2,\mathring{\mathscr{F}}(B)\mid\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z^2(B)])$. 再注意到 $\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z^1(D_3)]\subset\mathscr{F}_z^2$，故利用定理 1.36 有

$$\{\mathscr{F}_z^2,\mathring{\mathscr{F}}(B)\vee\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z^1(D_3)]\mid\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z^2(B)]$$

$$\vee\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z^1(D_3)]\}.$$

此式即为

$$\{\mathscr{F}_z^2,\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z(D)]\vee\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z^1(D_2)]$$

$$\vee\mathring{\mathscr{F}}(D_1)\mid\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z(D)]\}. \tag{21.3}$$

由 (21.2) (21.3) 及定理 1.34 立得

$$\{\mathscr{F}_z^1\cap\mathscr{F}_z^2,\mathring{\mathscr{F}}(D)\vee\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z(D)]\vee\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z^1(D_2)]$$

$$\vee\mathring{\mathscr{F}}(D_1)\mid\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z(D)]\}.$$

由于 $\mathscr{F}_z\subset\mathscr{F}_z^1\cap\mathscr{F}_z^2$，故特别地有

$$(\mathscr{F}_z,\mathring{\mathscr{F}}(D)\mid\mathring{\mathscr{F}}[\Pi_z(D)]),$$

所以 X 有宽将来马氏性. ∎

3.22 定理 (i) 设 X 具有 * 马氏性，则 X 有 i 马氏性，$i=1,2$.

(ii) 设 X 关于自然 σ 域族 $\{\mathring{\mathscr{F}}_z,\ z\in R_+^2\}$ 有 i 马氏性，$i=1,2$，则 X 关于自然 σ 域族有 * 马氏性.

证 (i) 对 $u,\ s\in T_+^{(1)}$，$u>s$，$t_1,\ \cdots,\ t_n\in T_+^{(2)}$，取 $t\in T-T_+^{(2)}$，$z=(s,t)$，由定义 3.14 知，

$$
\begin{aligned}
&E\{f[X(u,t_1),\cdots,X(u,t_n)]|\mathscr{F}_{s,t}^*\}\\
&=E\{f[X(u,t_1),\cdots,X(u,t_n)]|X(u,t),X(s,t),X(s,t_k),k\\
&=1,\cdots,n\}. \qquad (22.1)
\end{aligned}
$$

由于 $t<0$，故 $\mathscr{F}_{s,t}^*=\mathscr{F}_s^1$，$\sigma\{X(u,t),X(s,t),X(s,t_k),1\leqslant k\leqslant n\}=\sigma\{X(s,t_k),1\leqslant k\leqslant n\}$. 于是 (22.1) 意味着 X 有 1 马氏性. 类似可知 X 有 2 马氏性.

(ii) 设 $z=(s,t),y=(u,v)\in T^2,z<y$. 记 $D=R_z^2-R_z$，l 表示 R_z 与 D 的公共边界 (即 V_z^-). 下面用点代表单点集，如 $D\cup\{z\}$ 记为 $D\cup z$. 利用 X 的 1 马氏性知

$$(\mathring{\mathscr{F}}_s^1,\mathring{\mathscr{F}}(D\cup y)|\mathring{\mathscr{F}}[l\cup(s,v)]).$$

利用定理 1.37，注 意 $\mathring{\mathscr{F}}_s^1\vee\mathring{\mathscr{F}}(D)=\mathscr{F}_z^*$，有

$$(\mathring{\mathscr{F}}_z^*,\mathring{\mathscr{F}}(y)|\mathring{\mathscr{F}}[D\cup(s,v)]). \qquad (22.2)$$

利用 X 的 2 马氏性，应用定理 3.13 于集合 $\{(s,v),(u,v)\}$，再注意 $\mathring{\mathscr{F}}_t^2\supset\mathring{\mathscr{F}}(D)$，我们有

$$(\mathring{\mathscr{F}}(D),\mathring{\mathscr{F}}[(s,v)\cup y]|\mathring{\mathscr{F}}[z\cup(u,t)]).$$

利用定理 1.37，有

$$\{\mathring{\mathscr{F}}[D\cup(s,v)],\mathring{\mathscr{F}}(y)|\mathring{\mathscr{F}}[z\cup(u,t)\cup(s,v)]\}. \qquad (22.3)$$

依次对 (22.2) (22.3) 运用定理 1.31 (i) (iii)，我们得：$\forall f\in b\mathscr{E}$，有

$$E\{f[X(u,v)]|\mathscr{F}_z^*\}$$
$$=E\{f[X(u,v)]|\mathring{\mathscr{F}}[D\cup(s,v)]\}$$
$$=E\{f[X(u,v)]|X(u,t),X(s,t),X(s,v)\}.$$

所以 X 有 * 马氏性. ∎

3.23 定理 过程 X 有 * 马氏性的充要条件是下面的 (i) (ii) (iii) 成立：

(i) X 有宽过去马氏性.

(ii) $\forall$ 固定的 $t\in T_+^{(2)}$, $\{X(s,t),s\in T_+^{(1)}\}$ 关于 $\{\mathscr{F}_s^1, s\in T_+^{(1)}\}$ 是单参数马氏过程.

(iii) $\forall$ 固定的 $s\in T_+^{(1)}$, $\{X(s,t),t\in T_+^{(2)}\}$ 关于 $\{\mathscr{F}_t^2,t\in T_+^{(2)}\}$ 是单参数马氏过程.

证 (i)的必要性明显. 由定理 3.22 (i) 知 X 有 i 马氏性，$i=1$, 2. 而 (ii) (iii) 分别是 1 马氏性和 2 马氏性的特殊情形. 下面证充分性.

设 $z=(s,t),y=(u,v)\in T^2,z\leqslant y,f\in b\mathscr{E}$. 当 $z\in T_+^2$ 时，由 (i) 知 (4.1) 成立. 设 $z\in T^2-T_+^2$，分三步讨论.

1) 如 $z\in\{(u,v)\in T^2;u<0,v<0\}$，此时 $\mathscr{F}_z^*$ 为平凡的，故 (4.1) 成立.

2) 如 $z\in\{(u,v)\in T^2;u<0,v\geqslant 0\}$，此时 $\mathscr{F}_z^*=\mathscr{F}_t^2$, $\sigma\{X(z),X(z\otimes y),X(y\otimes z)\}=\sigma\{X(u,t)\}$，此时 (4.1) 化为

$$E\{f[X(y)]|\mathscr{F}_t^2\}=E\{f[X(y)]|X(u,t)\}. \qquad (23.1)$$

如 $u\in T_+^{(1)}$，则(iii)保证(23.1)成立；如 $s\in T^1-T_+^{(1)}$，因 $f[X(y)]$ 是非随机的变量，故 (23.1) 成立.

3) 如 $z\in\{(u,v)\in T^2;u\geqslant 0,v<0\}$，类似于 2)，可证 (4.1) 成立. ∎

§3.8 蕴含关系

3.24 定理 设 X 具有宽将来马氏性，则 X 具有单点马氏性.

证 由单点马氏性的定义 3.1 和宽将来马氏性的定义 3.6 得出. ∎

3.25 定理 设过程 X 关于 $\{\mathscr{F}_z,\ z\in R_+^2\}$ 有 * 马氏性. 则 X 关于 $\{\overset{\circ}{\mathscr{F}}(D), D\in\mathscr{D}\}$ 有 Levy 马氏性. 这里 $\mathscr{D}=\{D$: D 是一些正位矩形之并并满足局部有限性$\}$, $D\in\mathscr{D}$ 的局部有限性是指: D 的边界 ∂D 由平行于坐标轴的线段所组成,且存在正数 ϵ,使 ∂D 的每一线段的长不小于 ϵ.

证 分几步证明.

(一) 由引理 1.30, 我们只需证明: $\forall\ A=\{z_1,\ \cdots,\ z_n\}\subset\overline{D^c}$, 有

$$\{\overset{\circ}{\mathscr{F}}(\overline{D}),\overset{\circ}{\mathscr{F}}(A)\,|\,\overset{\circ}{\mathscr{F}}(\partial D)\}.$$

为此, 任取 z 使 $R_z\supset A$, 先证

$$\{\overset{\circ}{\mathscr{F}}(R_z\cap\overline{D}),\overset{\circ}{\mathscr{F}}(R_z\cap\overline{D^c})\,|\,\overset{\circ}{\mathscr{F}}(R_z\cap\partial D)\}.\qquad(25.1)$$

(二) 由局部有限性条件知, $R_z\cap\partial D$ 由有限条线段组成, 如图 1 示意.

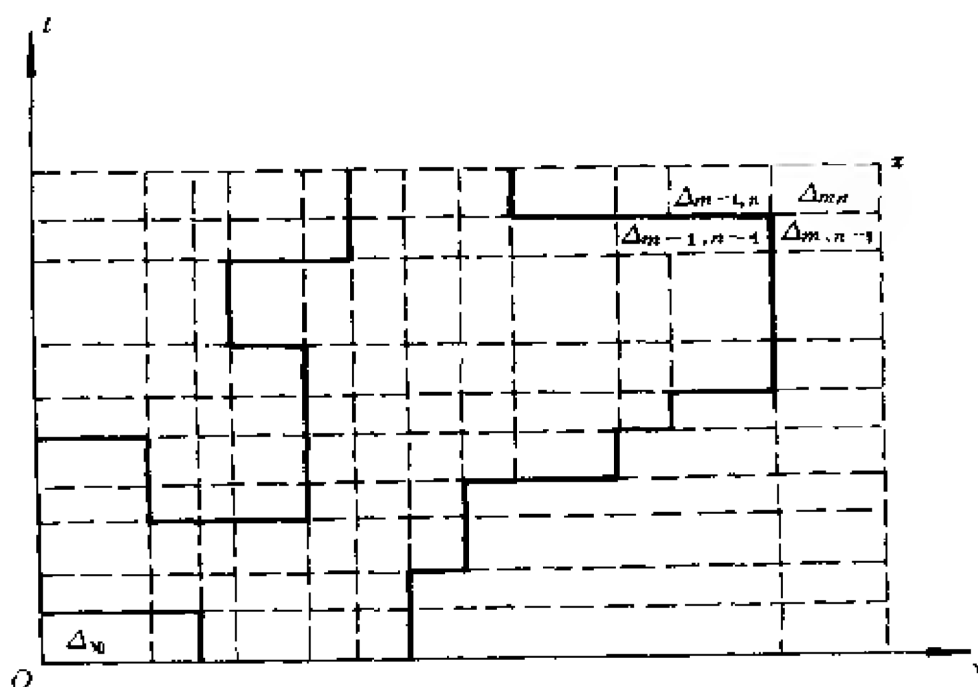


图 1

将这些线段延长，分割 R_z 为有限多个正位矩形 $\{\Delta_{ij}: 0\leqslant i\leqslant m, 0\leqslant j\leqslant n\}$，$\Delta_{ij}=(z_{ij}, z_{i+1,j+1}]$. 将诸 Δ_{ij}按含于 $\overline{D}$ 中或含于$\overline{D^c}$中分为两类，即令

$$M=\{(i,j):\Delta_{ij}\subset\overline{D}\}, F=\{(i,j):\Delta_{ij}\subset\overline{D^c}\}$$

视 $(i, j)\in M$ 或 F，分别以 ξ_{ij}或 η_{ij}表示 $\mathring{\mathscr{F}}(\Delta_{ij})$ 可测的有界随机变量. 将诸 Δ_{ij}按图示方式编号并按对角线方法排序：Δ_{mn}，$\Delta_{m-1,n}$，$\Delta_{m,n-1}$，$\Delta_{m-2,n}$，$\Delta_{m-1,n-1}$，…，Δ_{00}.

(三) 先考虑 Δ_{mn}，设 $(m,n)\in M$. 由定理1.31(i)(vi)，(25.1)等价于

$$E\{\prod_M\xi_{ij}|\mathring{\mathscr{F}}(R_z\cap\overline{D^c})\}\in\mathring{\mathscr{F}}(R_z\cap\partial D). \tag{25.2}$$

其中"$\in$"表示左方为 $\mathring{\mathscr{F}}(R_z\cap\partial D)$ 可测.

因 $\mathring{\mathscr{F}}(R_z\cap\overline{D^c})\subset\mathring{\mathscr{F}}^*_{z_{mn}}$，故

$$E\{\prod_M\xi_{ij}|\mathring{\mathscr{F}}(R_z\cap\overline{D^c})\}$$

$$=E\{\prod_{M-(m,n)}\xi_{ij}E(\xi_{mn}|\mathring{\mathscr{F}}^*_{z_{mn}})|\mathring{\mathscr{F}}(R_z\cap\overline{D^c})\}. \tag{25.3}$$

由于 X 有 * 马氏性，故可运用 X 在 z_{mn}处的宽过去马氏性，知

$$E(\xi_{mn}|\mathring{\mathscr{F}}^*_{z_{mn}})\in\mathring{\mathscr{F}}(L_{mn})\vee\mathring{\mathscr{F}}(L'_{mn}). \tag{25.4}$$

其中 L_{mn}和 L'_{mn}分别为 Δ_{mn}的左边界和下边界. 于是从 (25.3) (25.4) 知，为证 (25.2)，只要证：对 $\xi_{mn}\in\mathring{\mathscr{F}}(L_{mn})$，$\xi'_{mn}\in\mathring{\mathscr{F}}(L'_{mn})$，有

$$E\{\prod_{M-(m,n)}\xi_{ij}\xi_{mn}\xi'_{mn}|\mathring{\mathscr{F}}(R_z\cap\overline{D^c})\}\in\mathring{\mathscr{F}}(R_z\cap\partial D). \tag{25.5}$$

如果 $M_1=M-(m,n)$ 为空集，即 $R_z\cap\overline{D}=\Delta_{mn}$，此时必定 $L_{mn}\cup L'_{mn}\subset R_z\cap\partial D\subset R_z\cap\overline{D^c}$，从而

$$E\{\xi_{mn}\xi'_{mn}|\mathring{\mathscr{F}}(R_z\cap\overline{D'})\}=\xi_{mn}\xi'_{mn}\in\mathring{\mathscr{F}}(R_z\cap\partial D).$$

故（25.5）成立，从而（25.2）（25.1）得证.

今设 $M_1=M-(m,n)$ 非空. 我们将说明（25.5）左方的因子 ξ_{mn}、ξ'_{mn} 可去掉. 不妨以 ξ_{mn} 为例来说明. 如果 $(m-1,n)\in M$，则 $\xi_{mn}\in\mathring{\mathscr{F}}(L_{mn})\subset\mathring{\mathscr{F}}(\Delta_{m-1,n})$，即 ξ_{mn} 可与乘积中的 $\xi_{m-1,n}$ 合并；如果 $(m-1,n)\in F$，则 $\xi_{mn}\in\mathring{\mathscr{F}}(L_{mn})\subset\mathring{\mathscr{F}}(R_z\cap\partial D)$ 可自条件期望号中提出来，且 ξ_{mn} 已是 $\mathring{\mathscr{F}}(R_z\cap\partial D)$ 可测. 于是，为证（25.5），只需证

$$E\{\prod_{M_1}\xi_{ij}|\mathring{\mathscr{F}}(R_z\cap\overline{D'})\}\in\mathring{\mathscr{F}}(R_z\cap\partial D).\qquad(25.6)$$

其中 $M_1=M-(m,n)$.

（四）仍考虑 Δ_{mn}，设 $(m,n)\in F$. 像（三）一样证明可得：如果 $F_1=F-(m,n)$ 为空集，则（25.1）成立；如果 $F_1=F-(m,n)$ 非空，为证（25.1），只需证

$$E\{\prod_{F_1}\eta_{ij}|\mathring{\mathscr{F}}(R_z\cap\overline{D})\}\in\mathring{\mathscr{F}}(R_z\cap\partial D).\qquad(25.7)$$

（五）考虑 $\Delta_{m-1,m}$，并重复（三）（四）的讨论得：如果 $(m-1,n)\in M$，则当 $M_2=M_1-(m-1,n)$ 为空集时，（25.1）成立；当 M_2 非空时，为证（25.6），只要证用 M_2 代替 M_1 后的（25.6）成立. 如果 $(m-1,n)\in F$，则当 $F_2=F_1-(m-1,n)$ 为空集时，（25.1）成立；当 F_2 非空时，为证（25.7），只要证用 F_2 代替 F_1 后的（25.6）成立.

（六）依次考虑 $\Delta_{m,m-1}$，$\Delta_{m-2,n}$，…，Δ_{00}，最后，我们会得到：M_h，F_h 是空集，因而（25.1）成立，并且用空集 M_h、F_h 分别代替 M_1、F_1 后的（25.6）（25.7）显然地成立. 这样，我们完全地证明了（25.1）.

（七）取 s 充分大，使 $A=\{z_1,\cdots,z_n\}\subset R_{(s,s)}$. 由（25.1），$\forall\,\xi\in\mathring{\mathscr{F}}(A)$ 有

$$E\{\xi|\mathring{\mathscr{F}}(R_{(s,t)}\cap\overline{D})\}=E\{\xi|\mathring{\mathscr{F}}(R_{(s,t)}\cap\partial D)\}$$

令 $s\uparrow+\infty$，利用单参数鞅的收敛定理得

$$E\{\xi|\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D})\}=E\{\xi|\mathring{\mathscr{F}}(\partial D)\}\in\mathring{\mathscr{F}}(\partial D).$$

由定理 1.31(vi)，从上式得 $\{\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D}),\mathring{\mathscr{F}}(A)|\mathring{\mathscr{F}}(\partial D)\}$. 定理证完. ∎

3.26 定理 如果 X 关于 $D\subset R_+^2$ 有 Levy 马氏性，则 X 关于 $\mathring{\mathscr{F}}(D)$ 有内宽 Levy 马氏性和外宽 Levy 马氏性.

证 注意 $\partial D\subset O_\varepsilon^+(\partial D)\subset\overline{D}$, 故 $\mathring{\mathscr{F}}(\partial D)\subset\Sigma^+(\partial D)\subset\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D})$，故对 $A_2\in\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D})$，有

$$P(A_2|\Sigma^+(\partial D))=E\{P[A_2|\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D})\vee\mathring{\mathscr{F}}(\partial D)]|\Sigma^+(\partial D)\}$$

由于 X 的 Levy 马氏性 (17.1)，并两次利用定理 1.31 (i) (iv)，得上式等于

$$E\{P[A_2|\mathring{\mathscr{F}}(\partial D)]|\Sigma^+(\partial D)\}=P[A_2|\mathring{\mathscr{F}}(\partial D)]$$

$$=P[A_2|\mathring{\mathscr{F}}(D)\vee\mathring{\mathscr{F}}(\partial D)]=P[A_2|\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D})]$$

$$=P[A_2|\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D})\vee\Sigma^+(\partial D)],$$

所以

$$P[A_2|\Sigma^+(\partial D)]=P[A_2|\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D})\vee\Sigma^+(\partial D)].$$

从而得 X 的内宽 Levy 马氏性. 类似证 X 的外宽 Levy 马氏性. ∎

3.27 定理 设 X 关于自然 σ 域族 $\{\mathring{\mathscr{F}}_z, z\in R_+^2\}$ 有 * 马氏性. 则 X 关于 $\{\mathring{\mathscr{F}}(D), D\in\mathscr{C}\}$ 有内宽和外宽 Levy 马氏性，其中，$\mathscr{C}$ 是满足局部有限性条件的区域 $D\subset R_+^2$ 全体. 这里局部有限性，是指 D 在每个有界区域内，都只含有限多个不相交的部分，而且每一部份都有逐段光滑的边界.

证 为证外宽 Levy 马氏性 (20.1)，依定理 1.31 (vi)，只要

证：$\forall A=\{z_1,\cdots,z_m\}\subset\overline{D}^c$，$\xi\in\mathring{\mathscr{F}}(A)$，有

$$E\{\xi|\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D})\}=E\{\xi|\Sigma^-(\partial D)\}. \qquad (27.1)$$

由定理 3.25 的证明知，我们只需对局限于矩形 $R_z\supset A$ 的 D 证明 (27.1)，于是由局部有限性及引理 1.30 知，可设 D 是连通区域，且有逐段光滑的边界. 如图 2，对 $n\geqslant 1$，以 $1/2n(n-1)$ 为间距在 R_+^2 上作水平和竖直直线族. 这些直线在 O_{n-1}^- 与 O_n^- 段的部分，长度均不小于 $1/n(n-1)$，故局限于 $O_{n-1}^--O_n^-$ 内，每一水平（竖直）直线与竖直（水平）直线族都至少有两个交点. 于是，用直线族可作出折线 $L_n\subset O_{n-1}^--O_n^-$，使 L_n 的每一段的长度均不小于 $\epsilon=1/2n(n-1)$，记以 L_n 为边界且包含 $\overline{D}$ 的开区域为 D_n.

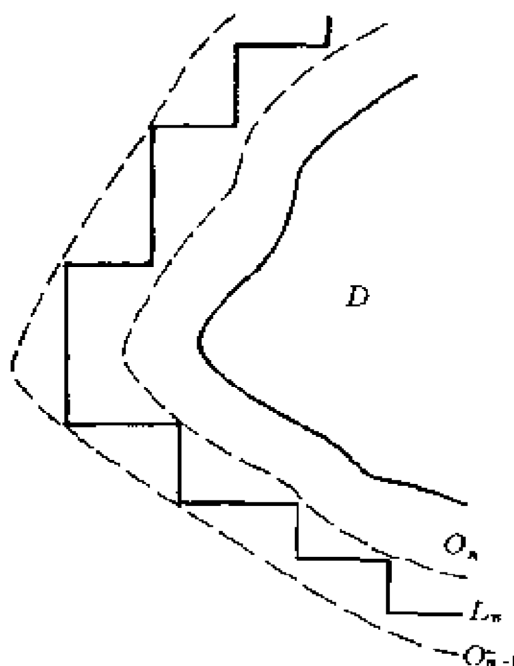


图 2

为证 (27.1)，显然不必考虑位于 ∂D 上的 $z_1,\cdots,z_m$. 故存在充分大的 n，使 $A=\{z_1,\cdots,z_m\}\subset\overline{D}_n^c$，于是依定理 3.25，$\forall\xi\in\mathring{\mathscr{F}}(A)$，

$$E\{\xi|\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D_n})\} - E\{\xi|\mathring{\mathscr{F}}(L_n)\}.$$

因 $L_n\subset\overline{D_n}-D\subset\overline{D_n}$，依定理 1.32 (i) 知

$$E\{\xi|\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D_n})\} = E\{\xi|\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D_n}-D)\}. \tag{27.2}$$

注意到 $O_n^-\subset\overline{D}_n-D\subset O_{n-1}^-$，在上式中令 $n\uparrow+\infty$ 得 $\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D}_n)\downarrow$ $\bigcap_n\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D}_n)\supset\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D}),\mathring{\mathscr{F}}(D_n-D)\downarrow\sum^-(\partial D)$，根据逆序鞅的收敛定理 2.8 得证 (27.1). 对内宽 Levy 马氏性的证明类似. ∎

3.28 定理 若 X 有外宽或内宽 Levy 马氏性，则 X 有宽 Levy 马氏性.

证 不妨设 X 有内宽马氏性，并令 $\mathscr{A}_1=\mathscr{F}(\overline{D}),\mathscr{A}_2=\mathscr{F}(\overline{D'}),\mathscr{G}_0=\Sigma(\partial D),\mathscr{G}_1=\Sigma^+(\partial D),\mathscr{G}_2=\Sigma^-(\partial D),\mathscr{G}=\Sigma^+(\partial D)\vee\Sigma^-(\partial D)$. 利用定理 1.32 (ii) 即可. ∎

§3.9 反　　例

3.29 例 设 $\{\xi(t),t\geqslant0\}$ 为单参数随机过程（不必是马氏过程），令

$$X(s,t)=\xi(t),s\geqslant0,$$

则 $X=\{X(z),z\in R_+^2\}$ 关于 $\{\mathring{\mathscr{F}}_z,z\in R_+^2\}$ 有宽过去马氏性. 如果 $\{\xi(t),t\geqslant0\}$ 不具有马氏性，则 X 不具有单点马氏性.

证 设 $z=(s,t)\leqslant y=(u,v),f\in b\mathscr{E}$,

由于　$f[X(y)]=f[X(z\otimes y)]$,

故
$$\begin{aligned}E\{f[X(y)]|\mathring{\mathscr{F}}_z^*\}&=f[X(z\otimes y)]\\&=E\{f[X(y)]|X(z),X(z\otimes y),X(y\otimes z)\},\end{aligned}$$

故 X 关 $(\mathring{\mathscr{F}}_z,z\in R_+^2)$ 有宽过去马氏性.

设 $\{\xi(t),t\geqslant0\}$ 不具有马氏性，并谬设 X 有单点马氏性. 则

$$E\{f[X(y)]|\mathring{\mathscr{F}}_z\}=E\{f[X(y)]|X(z)\}. \tag{29.1}$$

上式即

$$E\{f[\xi(v)]|\xi(u),u\leqslant t\} = E\{f[\xi(v)]|\xi(t)\}.$$

这是 $\{\xi(t),t\geqslant 0\}$ 的马氏性，矛盾. ▮

从例 3.29 立即得下面的命题.

3.30 命题 宽过去马氏性未必蕴含单点马氏性.

3.31 例 设 ξ，η 为随机变量. 记 $I_1=[0,1]\times[0,\infty)$，$I_2=[1,2)\times[0,\infty)$，$I_3=[2,3)\times[0,\infty)$，$I_4=[3,4]\times[0,\infty)$，$I_5=[4,\infty)\times[0,\infty)$. 对 $z\in R_+^2$，令

$$X(z)=\begin{cases}\xi, & \text{如 } z\in I_2\cup I_5;\\ \eta, & \text{如 } z\in I_1\cup I_3\cup I_4.\end{cases} \tag{31.1}$$

则 $X=\{X(z),z\in R_+^2\}$ 关于 $\{\mathring{\mathscr{F}}_z, z\in R_+^2\}$ 有宽过去马氏性，而无宽 Levy 马氏性.

证 因对 $z\leqslant y$，$f\in b\mathscr{E}$，有 $f[X(y)]=f[X(y\otimes z)]$，

故
$$\begin{aligned}E\{f[X(y)]|\mathring{\mathscr{F}}_z^*\} &= f[X(y\otimes z)]\\ &= E\{f[X(y)]|X(y\otimes z),X(z),X(z\otimes y)\},\end{aligned}$$

即 X 有宽过去马氏性. 下面证 X 无宽 Levy 马氏性. 取 $D=I_1\cup I_2\cup I_3$，则 $\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D})=\sigma(\xi,\eta)$，$\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D^c})=\sigma(\xi,\eta)$，$\Sigma(\partial D)=\sigma(\eta)$. 由于 $\Sigma(\partial D)\supset\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D})\cap\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D^c})$ 不真，由定理 1.30(i) 知 $(\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D}),\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D^c})|\Sigma(\partial D))$ 不真. 故 X 不具宽 Levy 马氏性. ▮

由例 3.31 立得下面的命题.

3.32 命题 宽过去马氏性未必蕴含宽 Levy 马氏性.

3.33 例 设 ξ 为随机变量，$I_1=([0,1]\times[0,\infty))\cup([1,2]\times[0,1])$，对 $z\in R_+^2$，令

$$X(z)=\begin{cases}0, & \text{如 } z\in I_1;\\ \xi, & \text{如 } z\in I_1^c.\end{cases} \tag{33.1}$$

则 $X=\{X(z),z\in R_+^2\}$ 关于任意 $D\subset R_+^2$ 有 Levy 马氏性，关于 $\{\mathring{\mathscr{F}}_z, z\in R_+^2\}$ 有单点马氏性，而不具有宽过去马氏性.

证 因$\forall D\subset R_+^2$，$\mathring{\mathscr{F}}(D)$，$\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D'})$，$\mathring{\mathscr{F}}(\partial D)$ 均只可能取$(\Omega,\varnothing)$ 或$\sigma(\xi)$. 如 $\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D})$ 或 $\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D'})$ 取$(\Omega,\varnothing)$，则显然有$(\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D}),\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D'})|\mathring{\mathscr{F}}(\partial D))$；如 $\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D})=\mathring{\mathscr{F}}(\overline{D'})=\sigma(\xi)$，则 $\mathring{\mathscr{F}}(\partial D)=\sigma(\xi)$，这样上述分裂关系也显然地成立. 故 X 有 Levy 马氏性.

往证 X 有单点马氏性. 设 $z\leqslant y$.

(i)如$z\in I_1$，则 $\mathring{\mathscr{F}}_z=(\Omega,\varnothing)$，显然有

$$(\mathring{\mathscr{F}}_z,\sigma[X(y)]|\sigma[X(z)]).$$

(ii) 如 $z\in R_+^2-I_1$，则 $\mathring{\mathscr{F}}_z=\sigma[X(z)]=\sigma(\xi)=\sigma[X(y)]$，此时也显然地有 $(\mathring{\mathscr{F}}_z,\sigma[X(y)]|\sigma[X(z)])$.

结合 (i) (ii) 知 X 有单点马氏性.

往证 X 没有宽过去马氏性. 取 $z=(1,1)$，$y=\left(\frac{3}{2},3\right)$，则 $\sigma[X(y)]=\sigma(\xi)$，$\mathring{\mathscr{F}}_z^*=\sigma(\xi)$，$\sigma[X(z),X(y\otimes z),X(z\otimes y)]=(\Omega,\varnothing)$. 由于$(\Omega,\varnothing)\supset\sigma(\xi)$ 不真，由定理 1.30(i) 知$(\mathring{\mathscr{F}}_z^*,\sigma[X(y)]|\sigma[X(z),X(z\otimes y),X(y\otimes z)])$ 不真. 故 X 不具有宽过去马氏性. ∎

由例 3.33 立即得下面的两个命题.

3.34 命题 Levy 马氏性未必蕴含宽过去马氏性.

3.35 命题 单点马氏性未必蕴含宽过去马氏性.

§ 3.10 强芽马氏性

分割线，宽停线等概念和有关记号见 § 1.2.

3.36 定义 设 $X=\{X(z),z\in R_+^2\}$ 是过程. 如果 L 关于 X 的自然 σ 域 $\{\mathring{\mathscr{F}}_z,\ z\in R_+^2\}$ 是宽停线，称 L 是 X 的宽停线.

3.37 记号 设 L 是过程 X 的宽停线. 设有射线族 h_λ: $t=\lambda s$ $(0\leqslant\lambda\leqslant\infty)$. $L(\omega)$ 与 h_λ 的交点记为 $L_\lambda(\omega)$. 当 $\lambda=0$ 或 $+\infty$ 时, 交点可能不存在, 或存在但不唯一. 此时, 我们分别约定 $L_\lambda(\omega)=+\infty$, 或 $L_\lambda(\omega)$ 是交点的最小者. 约定 $X(\infty)=\infty$. 设 X 为 Borel 可测. 记

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{G}_L=\sigma\{X(z),z\in L\},\\&\mathscr{H}_l=\sigma\{X(L_\lambda+z),z\in R_+^2,0\leqslant\lambda\leqslant+\infty\}.\end{aligned}\right\}\tag{37.1}$$

$$\mathscr{G}_L^+(\epsilon,\delta)=\sigma(L)\vee\sigma\{X(L_\lambda+z),z\in R_{(\epsilon,\delta)},0\leqslant\lambda\leqslant\infty\}.\tag{37.2}$$

$$\mathscr{G}_L^+=\bigcap_{\epsilon,\delta>0}\mathscr{G}_L^+(\epsilon,\delta).\tag{37.3}$$

其中 $\sigma(L)=\sigma\{(L<l),l\in\mathscr{L}\}$. 显然, L_λ 是 $\sigma(L)$ 可测的.

3.38 注 由 X 的 Borel 可测性不难证明: 利用其他的有非负斜率的直线族 $\{g_\lambda\}$ (例如, 平行直线族 g_μ: $t=\mu$, $0\leqslant\mu<\infty$), 只要 g_μ 与 L 的交点 L_μ (约定同上), 满足 $\bigcup_\mu L_\mu=L$. 则按 (37.1) (37.2) (37.3) 方式对族 $\{h_\lambda\}$ 和对族 $\{g_\mu\}$ 分别定义的 $\mathscr{H}_l$, $\mathscr{G}_L^+$ 是一致的.

3.39 定理 设 $*$ 马氏过程 X 右连续. 则 X 具有强右芽马氏性, 即 $\forall$ 宽停线 L, 有 $(\mathring{\mathscr{F}}_L,\mathscr{H}_L|\mathscr{G}_L^+)$.

证 称折线 $\beta\in\mathscr{L}$ 为 n 级梯线, 如果 β 的各线段平行于坐标轴, 且顶点是形如 $\left(\frac{m}{2^n},\frac{k}{2^n}\right)$ 的点. n 级梯线全体记为 $\mathscr{L}_n$. 由定义 3.36 易知, $\mathscr{L}_n$ 是可列集. 不难验证: $\forall\ l\in\mathscr{L}$ 和 $n=0,1,\cdots$, 存在唯一的 $\beta_l\in\mathscr{L}_n$ 使 $l<\beta_l$, 且对一切满足 $l<\beta$ 的 $\beta\in\mathscr{L}_n$, 均有 $\beta_l\leqslant\beta$. 令 $\varphi_n(l)=\beta_l$, 则 φ_n 定义了一个从 $\mathscr{L}$ 至 $\mathscr{L}_n$ 的单值映射.

设 L 为宽停线, 令 $L_n(\omega)=\varphi_n[L(\omega)]$, $\omega\in\Omega$.

因

$$\{L_n<l\}=\bigcup_{\beta\in\mathscr{L}_n}\{L<\beta<l\}\in\mathring{\mathscr{F}}([0,l]).$$

故 L_n 也是宽停线. 令

$$\mathscr{H}'_{L_n} = \sigma\{\bigcup_{\beta\in\mathscr{L}_n}(L_n - \beta)\cap\mathring{\mathscr{F}}([\beta,+\infty))\},$$

$$\mathscr{H}'_L = \bigvee_n \mathscr{H}'_{L_n},$$

$$\mathscr{G}^*_{L_n} = \sigma\{\bigcup_{\beta\in\mathscr{L}_n}(L_n = \beta)\cap\mathring{\mathscr{F}}_\beta\},$$

$$\mathscr{G}^*_L = \bigcap_{k=1}^{+\infty}\bigvee_{n=k}^{+\infty}\mathscr{G}^*_{L_n}.$$

设 $\beta\in\mathscr{L}_n$, $A=(L_n=\beta)$, 则

$$A\cap\mathring{\mathscr{F}}_{L_n} = A\cap\mathring{\mathscr{F}}([0,\beta]),$$

$$A\cap\mathscr{G}^*_{L_n} = A\cap\mathring{\mathscr{F}}(\beta),$$

$$A\cap\mathscr{H}'_{L_n} = A\cap\mathring{\mathscr{F}}([\beta,\infty)).$$

设 $B\in\mathscr{H}'_{L_n}$, 则存在 $B'\in\mathring{\mathscr{F}}([\beta,\infty))$, 使 $B\cap A=B'\cap A$, 故由定理 3.25 和条件期望的性质, 有

$$\begin{aligned} I_A P(B\,|\,\mathring{\mathscr{F}}_{L_n}) &= I_A P\{B'\,|\,\mathring{\mathscr{F}}([0,\beta])\} \\ &= I_A P\{B'\,|\,\mathring{\mathscr{F}}(\beta)\} \\ &= I_A P(B\,|\,\mathscr{G}^*_{L_n}). \end{aligned} \tag{39.1}$$

在上式两端中对 $\beta\in\mathscr{L}_n$ 求和得 $P(B\,|\,\mathring{\mathscr{F}}_{L_n}) = P(B\,|\,\mathscr{G}^*_{L_n})$. 因 $\mathscr{G}^*_{L_n}\subset\mathscr{F}_{L_n}$, 故由分裂 σ 域的性质知, $\mathscr{G}^*_{L_n}$ 分裂 $\mathring{\mathscr{F}}_{L_n}$ 与 $\mathscr{H}'_{L_n}$. 因而由 $\mathscr{G}^*_{L_{k+n}}\subset\mathring{\mathscr{F}}_{L_{k+n}}\subset\mathring{\mathscr{F}}_{L_k}$ 得 $\bigvee_{n=k}^{+\infty}\mathscr{G}^*_{L_n}$ 分裂 $\mathring{\mathscr{F}}_{L_k}$ 与 $\mathscr{H}'_{L_k}$. 因 $\bigvee_{n=k}^{+\infty}\mathscr{G}^*_{L_n}$ 单调降, 而 $\mathscr{H}'_{L_k}$ 单调增, 故由条件期望性质易知, $\mathscr{G}^*_L=\bigcap_{k=1}^{+\infty}\bigvee_{n=k}^{+\infty}\mathscr{G}^*_{L_n}$ 分裂 $\mathring{\mathscr{F}}_L\subset\mathring{\mathscr{F}}_{L_k}$ 与 $\mathscr{H}'_L=\bigvee_k\mathscr{H}'_{L_k}$. 但 $\sigma(L)\subset\mathring{\mathscr{F}}_L$, 故 $\sigma(L)\vee\mathscr{G}^*_L$

分裂 $\mathring{\mathscr{F}}_L$ 与 $\sigma(L)\vee\mathscr{H}'_L$. 由此易知，如果能证明：$\sigma(L)\vee\mathring{\mathscr{F}}^*_L$ $\subset\mathscr{G}^+_L\subset\sigma(L)\vee\mathscr{H}_L\subset\sigma(L)\vee\mathscr{H}'_L$，则 $\mathscr{G}^+_L$ 分裂 $\mathring{\mathscr{F}}_L$ 与 $\mathscr{H}_L$. 由定义，为证上述包含关系，只需证明：$\mathscr{G}^*_L\subset\mathscr{G}^+_L$ 和 $\mathscr{H}_L\subset\mathscr{H}'_L$.

先证 $\mathscr{G}^*_L\subset\mathscr{G}^+_L$. 记

$$A^n_{mk}=\left[\frac{m}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]\times\left[\frac{m+1}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right],m,k=0,1,2,\cdots \tag{39.2}$$

设梯线 $\beta\in\mathscr{L}_n$，令

$$S^n_\beta=\bigcup_{m,k}\{A^n_{mk};\beta\cap A^n_{mk}\neq\varnothing\text{ 且 }A^n_{mk}\subset[0,\beta]\}. \tag{39.3}$$

不难验证，当 $1/2^n<\min(\varepsilon,\delta)$ 时，$\forall\ z_i\in\beta\in\mathscr{L}_n$ ($1\leqslant i\leqslant j$)，当 $m(\geqslant n)$ 充分大时，对任何包含在 S^n_β 中的 $\alpha\in\mathscr{L}_m$，必有 $\lambda^i_\alpha\geqslant 0$ ($1\leqslant i\leqslant j$)，使得

$$\bigcap_{i=1}^{j}\{L_n=\beta,L_m=\alpha,X(z_i)\in B_i\}=\bigcap_{i=1}^{j}\{L_n=\beta,L_m=\alpha,X(L_{\lambda^i_\alpha}+\xi^i_\alpha)\in B_i\}. \tag{39.4}$$

其中 $B_i\in\mathscr{B}(R^1)$，

$$\xi^i_\alpha=\begin{cases}z_i-L_{\lambda^i_\alpha}, & \text{如 }0\leqslant z_i-L_{\lambda^i_\alpha}\leqslant(\varepsilon,\delta),\\ +\infty, & \text{其他}\end{cases} \tag{39.5}$$

易知 $\xi^i_\alpha\in\sigma(L)\subset\mathscr{G}^+_L(\varepsilon,\delta)$，故由 X 的乘积可测性知 $X(L_{\lambda^i_\alpha}+\xi^i_\alpha)\in\mathscr{G}^+_L(\varepsilon,\delta)$. 从而由 $L_k\in\sigma(L)$ 得(39.4)右端为 $\mathscr{G}^+_L(\varepsilon,\delta)$ 可测. 由此立得 $(L_n=\beta)\cap\mathscr{G}_\beta\subset\mathscr{G}^+_L(\varepsilon,\delta)$. 因此 $\mathscr{G}^*_L\subset\mathscr{G}^+_L$.

往证 $\mathscr{H}_L\subset\mathscr{H}'_L$. 设 B 为开集，由 X 的右连续性得

$$\{X(L_\lambda+z)\in B\}=\bigcup_{k=m}^{+\infty}\bigcap_{n=k}^{+\infty}\{\bigcup_{\beta\in\mathscr{L}_n}(L_n=\beta)\cap[X(\beta_\lambda+z)\in B]\}\in\mathscr{H}'_L.$$

其中 β_λ 是 β 与直线 h_λ 的交点. 故得所欲证. ∎

3.40 注 下面的定理指出：当我们利用宽停线（可以无界）两边的“芽”来定义分裂域时，可得到另一种强芽马氏性.

设 L 是宽停线. 令

$$\mathscr{G}_L(\varepsilon,\delta) = \sigma(L) \vee \sigma\{X(L_\lambda \pm z),$$
$$0 \leqslant z \leqslant (\varepsilon,\delta), 0 \leqslant \lambda \leqslant \infty\}. \tag{40.1}$$
$$\mathscr{G}_L = \bigcap_{\varepsilon,\delta>0} \mathscr{G}_L(\varepsilon,\delta). \tag{40.2}$$

记号 A^n_{mk}，S^n_β，β_l 同定理 3.39 的证明中．设 $\beta \in \mathscr{L}_n$，令

$$T^n_\beta = \bigcup_{m,k} \{A^n_{mk} : A^n_{mk} \cap (s^n_\beta - \beta) \neq \varnothing\}, \tag{40.3}$$

易知：如 $l \in \mathscr{L}$，则 $l \subset T^n_{\beta_l}$，且距离 $\rho(l, \partial T^n_{\beta_l}) > 0$．令

$$\mathscr{C}_{L_n} = \sigma(L) \vee \sigma\{\bigcup_{\beta\in\mathscr{L}_n} (L_n = \beta) \cap \mathring{\mathscr{F}}(T^n_\beta)\},$$

$$\mathscr{C}_L = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{C}_{L_n}.$$

3.41 定理 设 X 是 * 马氏过程，L 是宽停线，则

(i) $(\mathring{\mathscr{F}}_L, \mathscr{H}'_L | \mathscr{C}_L)$.

(ii) $\mathscr{G}_L = \mathscr{C}_L$ 且 $\mathscr{G}_L \vee \mathscr{H}_L = \mathscr{C}_L \vee \mathscr{H}'_L$，因而

$$(\mathring{\mathscr{F}}_L, \mathscr{H}_L | \mathscr{G}_L).$$

证 注意到 $\mathscr{G}^+_{L_n} \subset \mathscr{C}_{L_n} \subset \mathring{\mathscr{F}}_{L_n}$，由定理 3.39 证明的前一部份可得（i)．同样，由定理 3.39 证明中关于“$\mathscr{G}^*_L \subset \mathscr{G}^+_L$”的证明方法，可证（ii)． ■

§3.11 A 过程的马氏性

3.42 定义 称 $(\mathscr{F}_z, z \in T^2_+)$ 适应过程 $X = \{X(z), z \in T^2_+\}$ 为 A 过程，如果 $\forall\ z_1, z_2 \in T^2_+, z_1 < z_2$，存在 $\mathscr{E}^4$ 可测映射 $f_{z_1 z_2}: E^4 \to E$，及与 $\mathscr{F}^*_{z_1}$ 独立的随机变量 $r(z_1, z_2)$，使

$$X(z_2) = f_{z_1 z_2}[X(z_1), X(z_1 \otimes z_2),$$
$$X(z_2 \otimes z_1), r(z_1, z_2)]. \tag{42.1}$$

A 过程是一类非常广泛的随机过程，它包含所有两参数独立增量过程和两参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程．

3.43 定理 A 过程具有宽过去马氏性.

证 只要证明：$\forall z_1 \leqslant z_2$，$B \in \mathscr{E}$，有

$$P\{X(z_2) \in B | \mathscr{F}_{z_1}^*\} = P\{X(z_2) \in B | X(z_1), X(z_1 \otimes z_2), X(z_2 \otimes z_1)\}$$

由(42.1)，即要证

$$\begin{aligned} & P\{[X(z_1), X(z_1 \otimes z_2), X(z_2 \otimes z_1), r(z_1, z_2)] \\ & \quad \in C | \mathscr{F}_{z_1}^*\} \\ & = P\{[X(z_1), X(z_1 \otimes z_2), X(z_2 \otimes z_1), r(z_1, z_2)] \\ & \quad \in C | \mathscr{A}\}. \end{aligned} \tag{43.1}$$

其中 $C = f_{z_1 z_2}^{-1}(B) \in \mathscr{E}^4$，$\mathscr{A} = \sigma\{X(z_1), X(z_1 \otimes z_2), X(z_2 \otimes z_1)\}$.
故只要证对任意 $C \in \mathscr{E}^4$，(43.1) 成立.

先设 $C = C_1 \times C_2 \times C_3 \times C_4$，$C_i \in \mathscr{E}$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$. 此时 (43.1) 化为

$$P(DM | \mathscr{F}_{z_1}^*) = P(DM | \mathscr{A}). \tag{43.2}$$

其中 $D = [X(z_1) \in C_1, X(z_1 \otimes z_2) \in C_2, X(z_2 \otimes z_1) \in C_3]$，$M = [r(z_1, z_2) \in C_4]$. 由于 $r(z_1, z_2)$ 与 $\mathscr{F}_{z_1}^*$ 独立，(43.2) 两边均等于 $I_D P(M)$，故 (43.2) 成立.

因 $\mathscr{C} = \{C_1 \times C_2 \times C_3 \times C_4: C_i \in \mathscr{E}, 1 \leqslant i \leqslant 4\}$ 是 π 系，而使 (43.1) 成立的 C 全体 $\mathscr{H}$ 是 λ 系，$\mathscr{H} \supset \mathscr{C}$，依定理 1.3，$\mathscr{H} \supset \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{E}^4$. ∎

3.44 定理 设 A 过程 X 满足

(i) $\{X(s,0), \mathscr{F}_s^1, s \in T_+^{(1)}\}$ 和 $\{X(0,t), \mathscr{F}_t^2, t \in T_+^{(2)}\}$ 均是单参数马氏过程.

(ii) $\forall s \in T_+^{(1)}$，$z = (u,v) \in R_+^2$，$0 < v$，$X(s,0)$ 关于 $\sigma(X(z))$ 可测.

(iii) $\forall t \in T_+^{(2)}$，$z = (u, v) \in R_+^2$，$0 < u$，$X(0, t)$ 关于 $\sigma(X(z))$ 可测.

则 X 具有 * 马氏性. 特别地，如果 X 的初值是非随机的，即当 $z \in \lambda_0$ 时，$X(z)$ 是非随机的函数时，则 A 过程 X 具有 * 马氏性.

证 由定理 3.23 和 3.43 知，为证明定理，只要证明：$\forall$ 固

定的 $t_0 \in T_+^{(2)}$ 和 $s_0 \in T_+^{(1)}$，过程 $\{X(s,t_0),\mathscr{F}_s^1,s \in T_+^{(1)}\}$ 和 $\{X(s_0,t),\mathscr{F}_t^2,t \in T_+^{(2)}\}$ 是单参数马氏过程. 只证前者，即 $\forall B \in \mathscr{E}$，$s<u$，有

$$P\{X(u,t_0) \in B|\mathscr{F}_s^1\} = P\{X(u,t_0) \in B|X(s,t_0)\}. \tag{44.1}$$

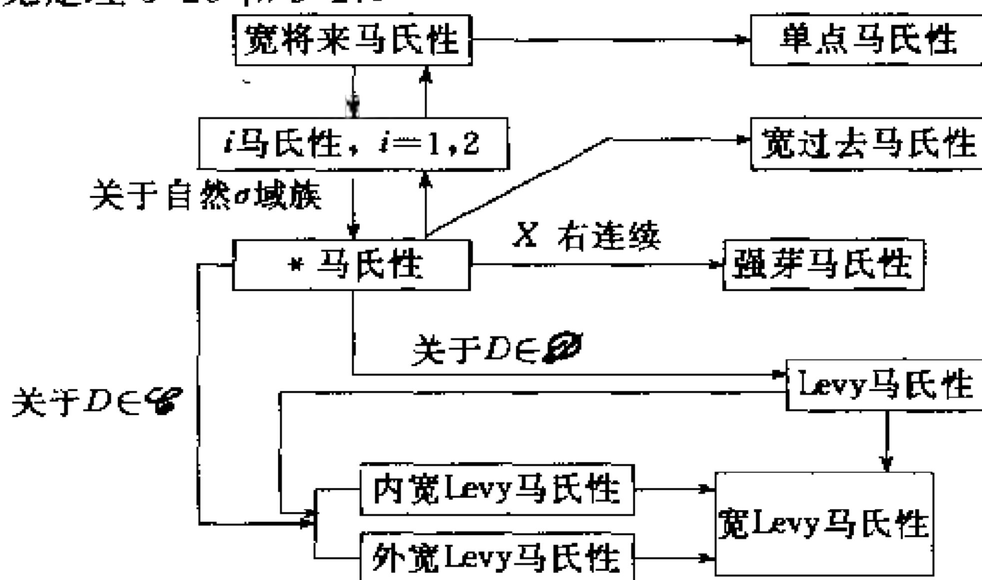
由 (i) 知上式对 $t_0=0$ 成立. 下面设 $t_0>0$. 由于 X 是 A 过程，故只要证明：$s\leqslant u$，

$$P\{\Lambda \ |\mathscr{F}_s^1\} = P\{\Lambda \ |X(s,t_0)\}. \tag{44.2}$$

其中 $\Lambda = \{[X(s,0), X(s,t_0), X(u,0), r((s,0),(u,t_0))] \in f^{-1}(B)\}$. 利用 (iii)，类似于定理 3.43 的证明知 (44.2) 成立. ▌

§3.12 关 系 图

各种两参数马氏性间的关系可用下面的框图表示. $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{C}$ 分别见定理 3.25 和 3.27.



3.45 注 由图易得下列结论

(i) 单点马氏性推不出宽将来马氏性.

(ii) 宽过去马氏性推不出 * 马氏性.

(iii) 关于任意 $D\in\mathscr{D}$ 具有 Levy 马氏性推不出 * 马氏性.

4 单点马尔可夫过程

单点马尔可夫过程的定义见定义 3.1. 它与单参数马氏过程有许多相似之处，但稍一深入研究，便发现它们有更多的本质上的不同.

§4.1 单点转移函数族

4.1 定义 设 E 可列. 实值函数族 $\mathscr{P}=\{P_{ij}(y,z),y,z\in T_+^2,y\leqslant z,y\neq z,i,j\in E\}$ 称为单点转移函数族，如果$\forall\ i,j\in E$，$y,z\in T_+^2$，$y\leqslant z$，$y\neq z$，有

(i) $P_{ij}(y,z)\geqslant 0.$ (1.1)

(ii) $\sum\limits_j P_{ij}(y,z)=1.$ (1.2)

(iii) $P_{ij}(y,z)=\sum\limits_r P_{ir}(y,a)P_{rj}(a,z),y\leqslant a\leqslant z,y\neq a\neq z.$

(1.3)

条件 (iii) 称为 K-C (Kolmogorov-Chapman) 方程. 当条件 (ii) 改为

(ii′) $\sum\limits_r P_{ij}(y,z)\leqslant 1.$ (1.4)

时，称 $\mathscr{P}$ 为广义单点转移函数族.

用矩阵记号

$$P(y,z)=\{P_{ij}(y,z):i,j\in E\}. \tag{1.5}$$

则 (iii) 可简记为

$$P(y,z)=P(y,a)P(a,z),y\leqslant a\leqslant z,y\neq a\neq z. \tag{1.6}$$

4.2 定义 如果 $P(y,z)$ 只依赖于 $z-y$，称 $\mathscr{P}$ 为齐次的．此时，记 $P_{ij}(y,z)=P_{ij}(z-y)$．特别地，$z-y=(s,t)$ 时，记为 $P_{ij}(s,t)$．

4.3 定义 设 $X=\{X(z),z\in T_+^2\}$ 是单点马氏过程．称 X 有单点转移函数族 $\mathscr{P}$，如果对 $y\leqslant z$，$y\neq z$．

$$P\{X(z)=j|X(y)=i\}=P_{ij}(y,z), \tag{3.1}$$

只要 $P\{X(y)=i\}>0$．如果 $\mathscr{P}$ 是齐次的，称 X 是齐次的．

4.4 注 当 $y=(u,v),z=(s,t)$ 时，$P_{ij}(y,z)=P_{ij}(u,v;s,t)$ 也称为 X 在 (u,v) 时刻位于 i，经水平时间 $s-u$ 和竖直时间 $t-v$ 后，到达 j 的概率．

像定理 1.18 一样，按（3.1）只能得到一部份转移函数 $P_{ij}(y,z)$，尚需对 $P\{X(y)=i\}=0$ 情形，补充定义 $P_{ij}(y,z)$ 的值，以便得到一个完整的 $\mathscr{P}$，而且使 $\mathscr{P}$ 满足定义 4.1 中的 (i)—(iii)．这可能吗？答案是肯定的．

4.5 定理 每个单点马氏过程必有单点转移函数族．

证 令 $E_+(y)=\{i:P[X(y)=i]>0\}$，$E_0=E-E_+(y)$，$E_+^2(y,z)=\{(i,j):P[X(y)=i,X(z)=j]>0\}$．令

$$u_{ij}(y)=\begin{cases}\delta_{ij}, & \text{如 } i\in E_+(y),j\in E;\\ r_{ij}=0, \text{如 } i\in E_0(y),j\in E_0(y);\\ r_{ij}\geqslant 0, \text{如 } i\in E_0(y),j\in E_+(y).\end{cases} \tag{5.1}$$

其中当 $i\in E_0(y)$，$j\in E_+(y)$ 时，$r_{ij}\geqslant 0$ 可任取，只要满足 $\sum_j r_{ij}=1$．

对 $y\leqslant z$，$y\neq z$，i，$j\in E$，令

$$P_{ij}(y,z)=\sum_{r\in E_+(y)} u_{ir}(y)P\{X(z)=j|X(y)=r\}. \tag{5.2}$$

注意，当 $i\in E_+(y)$ 时，（5.2）化为（3.1）．从而按（5.2）定义的 $\mathscr{P}=\{P_{ij}(y,z),y\leqslant z,y\neq z,i,j\in E\}$ 满足

$$P_{ij}(y,z)=\sum_r u_{ir}(y)P_{rj}(y,z),y\leqslant z,y\neq z. \tag{5.3}$$

往证 $\mathscr{P}$ 满足定义 4.1 中的 (i)(ii)(iii). (i)(ii) 平凡，证(iii). 注意 $E_+^2(y,z)\subset E_+(y)\times E_+(z)$，从(5.2)有

$$P_{ir}(y,a)=\begin{cases}0, & \text{如 } r\in E_0(a);\\ \sum\limits_{k\in E_+(y)} u_{ik}(y)P\{X(a)=r|X(y)=k\}, & \text{如 } r\in E_+(a)\end{cases}\tag{5.4}$$

故

$$\begin{aligned}&\sum_r P_{ir}(y,a)P_{rj}(a,z)\\ &=\sum_{r\in E_+(a)} P_{ir}(y,a)P_{rj}(a,z)\\ &=\sum_{r\in E_+(a)}\sum_{k\in E_+(y)} u_{ik}(y)P\{X(a)\\ &=r|X(y)=k\}P\{X(z)=j|X(a)=r\}.\end{aligned}\tag{5.5}$$

注意

$$P\{X(y)=k,X(a)=r\}=0,\ \text{如}\ (k,r)\in E_+(y)\times E_+(a)-E_+^2(y,a)\tag{5.6}$$

此时 $P\{X(a)=r|X(y)=k\}=0$. 如 $(k,r)\in E_+^2(y,a)$，由单点马氏性，我们有

$$P\{X(z)=j|X(y)=k,\ X(a)=r\}=P\{X(z)=j|X(a)=r\},$$

故 (5.5) 等于

$$\begin{aligned}&\sum_{(k,r)\in E_+^2(y,a)} u_{ik}(y)P\{X(a)=r|X(y)=k\}P\{X(z)\\ &=j|X(y)=k,X(a)=r\}\\ &=\sum_{(k,r)\in E_+^2(y,a)} u_{ik}(y)\frac{P\{X(y)=k,X(a)=r,X(z)=j\}}{P\{X(y)=k\}}.\end{aligned}$$

由 (5.6)，上式等于

$$\begin{aligned}&\sum_{(k,r)\in E_+(y)\times E_+(a)} u_{ik}(y)\frac{P\{X(y)=k,X(a)=r,X(z)=j\}}{P\{X(y)=k\}}\\ &=\sum_{k\in E_+(y)} u_{ik}(y)\sum_{r\in E_+(a)}\frac{P\{X(y)=k,X(a)=r,X(z)-j\}}{P\{X(y)=k\}}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k\in E_+(y)} u_{ik}(y)\frac{P\{X(y)=k,X(z)=j\}}{P\{X(y)=k\}}$$

$$= \sum_{k\in E_+(y)} u_{ik}(y)P\{X(z)=j|X(y)=k\} = P_{ij}(y,z).$$ ∎

4.6 定义 称 $q_j(z)=P\{X(z)=j\}$ 为 X 的绝对概率，$q_j=q_j(0)$为 X 的原点分布.

4.7 定理 （有向联合分布） 设 X 为单点马氏过程，有单点转移函数族 $\mathscr{P}$. 则$\forall\ 0\leqslant z_1\leqslant z_2\leqslant\cdots\leqslant z_k, 0\neq z_1\neq z_2\neq\cdots\neq z_k, i_1, i_2, \cdots, i_k\in E$，有

$$P\{X(z_j)=i_j, 1\leqslant j\leqslant k\} = P_{z_1},\cdots,Z_k(i_1,\cdots,i_k). \tag{7.1}$$

这里，$z_0=0$，

$$P_{z_1},\cdots,Z_k(i_1,\cdots,i_k) = \sum_{i_0} q_{i_0}\prod_{j=1}^{k}P_{i_{j-1}i_j}(z_{j-1},z_j), \tag{7.2}$$

而称 $\mathscr{A}=\{P_{z_1,\cdots,z_k}(i_1,\cdots,i_k): 0\leqslant z_1\leqslant z_2\leqslant\cdots\leqslant z_k, 0\neq z_1\neq\cdots\neq z_k, i_1,\cdots,i_k\in E\}$ 为 X 的有向联合分布族.

证 由 X 的单点马氏性易得. ∎

X 的有向联合分布族是 X 的有限维联合分布族的子族. 一般来说，前者不能唯一决定后者. 但给定满足通常相容性条件的有向联合分布族 $\mathscr{A}$，是否存在单点马氏过程 X，它的有向族与 $\mathscr{A}$ 重合？尚待证实.

§4.2 单点马氏过程的单向转移

设 $X=\{X(z), z\in T_+^2\}$ 是单点马氏过程，$\mathscr{P}=\{P(y,t); y,z\in T_+^2, y\leqslant z, y\neq z\}$ 为其单点转移函数族. 记

$$\left.\begin{aligned} P_{ij}((u,v),(s,v)) &= {}_v\overline{P}_{ij}(u,s),\\ P_{ij}((u,v),(u,t)) &= {}_u\hat{P}_{ij}(v,t). \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

易见，${}_v\overline{\mathscr{P}}=\{{}_v\overline{P}(u,s): u,s\in T_+^{(1)}, u<s\}$ 和 ${}_u\hat{\mathscr{P}}=\{{}_u\hat{P}(v,t): v,$

$t \in T_+^{(2)}, v < t\}$ 均是单参数转移函数族，分别称为 X 的水平转移函数族和竖直转移函数族.

4.8定理 对单点转移函数族 $\mathscr{P}$，有

$$P((u,v),(s,t)) = {}_u\hat{P}(v,t) \cdot {}_t\overline{P}(u,s)$$
$$= {}_v\overline{P}(u,s) \cdot {}_s\hat{P}(v,t) \qquad (8.1)$$

反之，对每个 $(u, v) \in T_+^2$，给定单参数转移函数族 ${}_u\hat{\mathscr{P}}$，${}_v\overline{\mathscr{P}}$，设满足

$${}_u\hat{P}(v,t) \cdot {}_t\overline{P}(u,s) = {}_v\overline{P}(u,s) \cdot {}_s\hat{P}(v,t) . \qquad (8.2)$$

则由 (8.1) 确定的 $\mathscr{P}$ 是单点转移函数族.

证 由定义4.1，易知 (8.1) 成立.

反之，由 (8.1) 定义的 $\mathscr{P}$ 显然满足定义4.1中的 (i)(ii),往证满足(iii),即要证:对 $y = (u,v) \leqslant a = (\alpha,\beta) \leqslant z = (s,t), y \neq a \neq z$, 有

$$P((u,v),(s,t)) = P((u,v),(\alpha,\beta))P((\alpha,\beta),(s,t)) . \qquad (8.3)$$

由 (8.1) (8.2)，上式右方等于

$$[{}_v\overline{P}(u,\alpha) \cdot {}_\alpha\hat{P}(v,\beta)] \cdot [{}_\beta\overline{P}(\alpha,s) \cdot {}_s\hat{P}(\beta,t)]$$
$$= {}_v\overline{P}(u,\alpha) \cdot [{}_\alpha\hat{P}(v,\beta) \cdot {}_\beta\overline{P}(\alpha,s)] \cdot {}_s\hat{P}(\beta,t)$$
$$= {}_vP(u,\alpha) \cdot [{}_v\overline{P}(\alpha,s) \cdot {}_s\hat{P}(v,\beta)] \cdot {}_s\hat{P}(\beta,t)$$
$$= [{}_v\overline{P}(u,\alpha) \cdot {}_v\overline{P}(\alpha,s)] \cdot [{}_s\hat{P}(v,\beta) \cdot {}_s\hat{P}(\beta,t)].$$

利用${}_v\overline{\mathscr{P}}$，${}_s\hat{\mathscr{P}}$ 是单参数转移函数族，上式右方等于

$${}_v\overline{P}(u,s) \cdot {}_s\hat{P}(v,t)$$

由(8.1),它等于 $P((u,v),(s,t))$,故(8.3) 成立. ∎

§4.3 齐次情形和双向随机游动

在齐次的情形,(7.3) 确定的 ${}_v\overline{P}(u,s) = \{{}_v\overline{P}_{ij}(u,s): i,j \in E\}$ 与 v 无关,且只依赖于 $s-u$,故可记为 $\overline{P}(s-u)$,而${}_u\hat{P}(v,t) = \{{}_u\hat{P}_{ij}(v,t): i,j \in E\}$ 与 u 无关,且只依赖于 $t-v$,故可记为 $\hat{P}(t-$

v). 这样，(8.2)(8.1) 成为

$$\overline{P}(s)\hat{P}(t) = \hat{P}(t)\overline{P}(s), \tag{8.4}$$

$$P(s,t) = \overline{P}(s)\hat{P}(t) = \hat{P}(t)\overline{P}(s). \tag{8.5}$$

进一步，在齐次且参数 $T_+^2 = Z_+^2$ 的情形，记

$$\overline{P} = \overline{P}(1), \hat{P} = \hat{P}(1), \tag{8.6}$$

则 (8.4) (8.5) 成为

$$\overline{P}\hat{P} = \hat{P}\overline{P} \tag{8.7}$$

$$P(s,t) = (\overline{P})^s \cdot (\hat{P})^t = (\hat{P})^t \cdot (\overline{P})^s \tag{8.8}$$

4.9 引理 设 $E = \{0, 1, 2, \cdots\}$，$\overline{P}$ 是 E 上的随机游动，即

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} r & s & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \tag{9.1}$$

其中，r，s 非负，p，q 为正数，$r+s=p+q=1$. 设 $\hat{P}$ 是另一随机游动，相应的参数为 r'，s'，p'，q'. 如果 (8.7) 成立，则 $\overline{P}=\hat{P}$.

证 比较 $\overline{P}\hat{P}$ 和 $\hat{P}\overline{P}$ 的第 (i,j) 个元素，并令 (i,j) 为 $(0,0)$，$(0,1)$，$(0,2)$，$(2,1)$. 再注意 $r+s=r'+s'=p+q=p'+q'=1$，便得 $r=r'$，$p=p'$. ■

由引理4.9，我们有下面的定理

4.10定理 设 $E = \{0,1,2,\cdots\}$，$X = \{X(z), z \in Z_+^2\}$ 是齐次的单点马氏过程，$\overline{P}$ 和 $\hat{P}$ 分别是 X 的水平一步转移矩阵和竖直一步转移矩阵，均形如 (9.1)，则 $\overline{P}=\hat{P}$.

4.11定义 单点转移函数为 (8.5) 的齐次单点马氏过程 $X=\{X(z), z \in T_+^2\}$，称为 $(\overline{P}(s), \hat{P}(t))$ 单点马氏过程. 具有单点转移函数(8.8) 的齐次单点马氏过程 $X = \{X(z), z \in Z_+^2\}$，称为 $(\overline{P}, \hat{P})$ 单点马氏过程. 特别地，当 $\overline{P} = \hat{P} = Q$ 时，$(\overline{P}, \hat{P})$ 单点马氏过程称为 Q 双向随机游动.

5 宽过去马氏过程的一般理论

§5.1 三点转移函数族的定义和例

5.1定义 称实值函数族 $\mathscr{P}=\{P(u,v;s,t;x,y,z,B):(u,v)\in T_+^2,(0,0)<(s,t)\in T_+^2,x,y,z\in E,B\in\mathscr{E}\}$ 为三点转移函数族，如果下面条件(i)—(iv)满足：

(i) 固定 u, v, s, t, x, y, z, $P(u,v;s,t;x,y,z,\cdot)$是 $(E,\mathscr{E})$ 上的概率测度.

(ii) 固定 u, v, s, t, B, $P(u,v;s,t;\cdot,\cdot,\cdot,B)$ 是 $\mathscr{E}^3$ 可测函数.

(iii) 水平转移性：$\forall s'>0$及$\forall \xi\in E$，都有

$$\begin{aligned}&P(u,v;s+s',t;x,y,z,B)\\&=\int_E P(u,v;s,t;x,y,\xi,d\eta)P(u+s,v;s',t;\xi,\eta,z,B).\end{aligned}\tag{1.1}$$

(iv) 竖直转移性：$\forall t'>0$及$\forall \xi\in E$，都有

$$\begin{aligned}&P(u,v;s,t+t';x,y,z,B)\\&=\int_E P(u,v;s,t;x,\xi,z,d\eta)P(u,v+t;s,t';\xi,y,\eta,B).\end{aligned}\tag{1.2}$$

简记 $\mathscr{P}=\{P(u,v;s,t):(u,v)\in T_+^2,(0,0)<(s,t)\in T_+^2\}$ 其中 $P(u,v;s,t)=\{P(u,v;s,t;x,y,z,B):x,y,z\in E,B\in\mathscr{E}\}$.

5.2定义 三点转移函数族 $\mathscr{P}$ 称为齐次的，如果每一元 $P(u,v;s,t;x,y,z,B)$ 都与 u,v 无关. 此时，记为 $P(s,t;x,y,z,B)$，而 $P(u,v;s,t)=P(s,t)$.

除较少情形外，本书均讨论齐次三点转移函数族 $\mathscr{P}=\{P(s,t);(0,0)<(s,t)\in T_+^2\}$.

5.3例 设 $(E,\mathscr{E})=(R,\mathscr{B}(R))$,

$$P(s,t;x,y,z,B)=\frac{1}{\sqrt{2\pi st}}\int_B \exp\left[\frac{(x-y-z+\xi)^2}{2st}\right]d\xi. \tag{3.1}$$

则 $\mathscr{P}$ 是齐次三点转移函数族，称为 Brown 单三点转移函数族.

5.4例 设 $(E,\mathscr{E})=(R,\mathscr{B}(R))$,

$$\begin{aligned}P(s,t;x,y,z,B)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}H}\int_B \exp\{[x\exp(-\alpha s-\beta t)-y\exp(-\alpha s)\\&\quad -z\exp(-\beta t)+\xi]^2/(2H^2)\}d\xi.\end{aligned} \tag{4.1}$$

其中 $H^2=\sigma^2(4\alpha\beta)^{-1}[1-\exp(-2\alpha s)][1-\exp(-2\beta t)]$，常数 $\sigma>0,\alpha>0,\beta>0$，则 $\mathscr{P}$ 是齐次三点转移函数族，称为两参数 Ornstein-Uhlenbeck 三点转移函数族.

5.5例 设 E 为一切整数的集合 Z，$\mathscr{E}$ 为 Z 的所有子集的集类. 令

$$P(s,t;i,j,k,r)=\begin{cases}e^{-\lambda st}\dfrac{(\lambda st)^{i-j-k+r}}{(i-j-k+r)!}, & \text{如 } i-j-k+r\geqslant 0;\\ 0, & \text{如 } i-j-k+r<0.\end{cases} \tag{5.1}$$

$P(s,t;i,j,k,B)=\sum_{r\in B}P(s,t;i,j,k,r)$. 则 $\mathscr{P}$ 是齐次三点转移函数族. 称为扩状 Poisson 单三点转移函数族.

5.6定义 设 X 是宽过去马氏过程. 如果存在三点转移函数族 $\mathscr{P}$，使得

$$
\begin{aligned}
&P\{X(u+s,v+t)\in B\,|\,X(u,v),\\
&\quad X(u,v+t),X(u+s,v)\}\\
&=P(u,v;s,t;X(u,v),X(u,v+t),X(u+s,v),B).
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

称 X 具有三点转移函数族 $\mathscr{P}$.

§5.2 规则宽过去马氏过程

设 $z_0=(0,0),z_1,\cdots,z_n\in T_+^2$,它们的竖直投影和水平投影分别是:$(0,0),(s_1,0),\cdots,(s_r,0)$ 和 $(0,0),(0,t_1),\cdots,(0,t_q),0=s_0<s_1<\cdots<s_r,0=t_0<t_1<\cdots<t_q$. 记 $z_{ij}=(s_i,t_j)$. 显然,对每个 z_k,存在唯一的 (i,j) 使 $z_k=z_{ij}$. 设 X 是取值于 $(E,\mathscr{E})$ 的两参数过程,则对 $B_k\in\mathscr{E}$,$0\leqslant k\leqslant n$,有

$$
\begin{aligned}
&P\{X(z_k)\in B_k,0\leqslant k\leqslant n\}\\
&=P\{X(z_{ij})\in B_{ij},0\leqslant i\leqslant r,0\leqslant j\leqslant q\}.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

其中,如果 $z_k=$某 z_{ij},则令 $B_{ij}=B_k$,否则令 $B_{ij}=E$.

5.7定理 设 $\mathscr{P}=\{P(u,v;s,t):(u,v)\in T_+^2,0<(s,t)\in T_+^2\}$ 是三点转移函数族. 设 $X=\{X(z),z\in T_+^2\}$ 是过程. 设 r,q 是任意非负整数,记 $M_{rq}=\{(i,j):0\leqslant i\leqslant r,0\leqslant j\leqslant q\},I_r=\{i:1\leqslant i\leqslant r\},J_q=\{j:1\leqslant j\leqslant q\}$. 对任意 $0=s_0<\cdots<s_r,0=t_0<\cdots<t_q,z_{ij}=(s_i,t_j),B_{ij}\in\mathscr{E},(i,j)\in M_{rq}$,均有

$$
\begin{aligned}
&P\{X(z_{ij})\in B_{ij},(i,j)\in M_{rq}\}\\
&=\int_{E^{r+q+1}}\mu(d\eta_{00};d\eta_{i0};i\in I_r;d\eta_{0j},j\in J_q)G(z_{ij},B_{ij},(i,j)\\
&\quad\in M_{rq};\eta_{00};\eta_{i0},i\in I_r;\eta_{0j},j\in J_q).
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

其中,测度 μ 是 $(X(0,0);X(s_i,0),i\in I_r;X(0,t_j),j\in J_q)$ 的分布,即

$$
\begin{aligned}
&\mu(d\eta_{00};d\eta_{i0},i\in I_r;d\eta_{0j},j\in J_q)\\
&=P\{X(0,0)\in d\eta_{00};X(s_i,0)\in d\eta_{i0},\\
&\quad i\in I_r;X(0,t_j)\in d\eta_{0j},j\in J_q\}
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

而函数 G 仅由 $\mathscr{P}$ 决定：

$$G(z_{ij},B_{ij},(i,j)\in M_{rq};\eta_{oo};\eta_{io},i\in I_r;\eta_{oj},j\in J_q)$$

$$=\int_{E^{rq}}\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{q}P(s_{i-1},t_{j-1};s_i-s_{i-1},t_j-t_{j-1};\eta_{i-1,j-1},$$

$$\eta_{i-1,j},\eta_{i,j-1},d\eta_{ij})I_{B_{ij}}(\eta_{ij})I_{B_{oo}}(\eta_{oo})\prod_{i=1}^{r}I_{B_{io}}(\eta_{io})\prod_{j=1}^{q}I_{B_{oj}}(\eta_{oj}).$$

(7.3)

约定 $r=q=0$ 时，函数 $G=I_{B_{oo}}(\eta_{oo})$；当 $r>0,q=0$ 时，$G=\prod_{i=0}^{r}I_{B_{io}}(\eta_{io})$；当 $r=0,q>0$ 时，$G=\prod_{j=0}^{q}I_{B_{oj}}(\eta_{oj})$. 则 X 是宽过去马氏过程，具有三点转移函数族 $\mathscr{P}$.

证 记 (7.1) 右方式子确定的值为

$$F(z_{ij},B_{ij},(i,j)\in M_{rq}).$$

设 $H\subset M_{rq}$，则在 (7.1) (7.3) 中对 $(i,j)\in M_{rq}-H$ 取 $B_{ij}=E$ 而得到的值分别记为

$$F(z_{ij},B_{ij},(i,j)\in H),$$

$$G(z_{ij},B_{ij},(i,j)\in H;\eta_{00};\eta_{io},i\in I_r;\eta_{oj},j\in J_q).$$

为简单计，就齐次的 $\mathscr{P}$ 证明定理.

设 $(s,t)\in T_+^2,0<(h,k)\in T_+^2$. 简记 $\xi=(X(s,t),X(s,t+k),X(s+h,t))$，$\mathscr{A}=\sigma(\xi)$. 为证定理，只要证：对 $A\in\mathscr{F}_{s,t}^*$ 有

$$\int_A P\{X(s+h,t+k)\in B|\mathscr{A}\}dP$$

$$=P\{A,X(s+h,t+k)\in B\}. \tag{7.4}$$

(一) 先证 X 有转移函数族 $\mathscr{P}$，即要证

$$P\{X(s+h,t+k)\in B|\mathscr{A}\}=P(s,t;h,k;\xi,B).$$

(7.5)

由定义5.1，上式右方为 $\mathscr{A}=\sigma(\xi)$ 可测，故只要证：对 $A\in\mathscr{A}$ 有

$$\int_A P(s,t;h,k;\xi,B)dP=P\{A,X(s+h,t+k)\in B\}.$$

(7.6)

用$\lambda-\pi$系方法，只要证上式对形如$A=(\xi\in C_1\times C_2\times C_3)$成立即可，$C_i\in\mathscr{E}$.

利用积分变换，(7.6) 左方等于

$$\int_{C_1\times C_2\times C_3} P(s,t;h,k;\eta_{11},\eta_{12},\eta_{21},B)Q(d\eta_{11},d\eta_{12},d\eta_{21}),\tag{7.7}$$

其中$Q(C)=P(\xi\in C)$.

设$(s,t)\notin\lambda_0$，即$0<(s,t)$，由(7.1)知

$$Q(D_1\times D_2\times D_3)=F(z_{ij},B_{ij},(i,j)\in M_{22}).\tag{7.8}$$

其中$0=s_0<s_1=s<s_2=s+h$，$0=t_0<t_1=t<t_2=t+k$，$B_{11}=D_1$，$B_{12}=D_2$，$B_{21}=D_3$，其余的诸$B_{ij}=E$. 将 (7.8) 代入 (7.7) 得 (7.6) 左方等于 (7.8) 右方，但其中$B_{11}=C_1$，$B_{12}=C_2$，$B_{21}=C_3$，$B_{22}=B$，其余诸$B_{ij}=E$. 而依 (7.1)，这正是 (7.6) 右方. 故 (7.6) 成立.

设$(s,t)\in\lambda_0$，也可类似地证明 (7.6) 成立. 从而证明了 (7.5).

(二) 往证 (7.4).

设$0=s_0<s_1<\cdots<s_r$，$0=t_0<t_1<\cdots<t_r$，只需对$A=\{X(s_i,t_j)\in A_{ij},(s_i,t_j)\in R_+^2\}$证(7.4). 不失一般性，可设$s$，$s+h$，$t$，$t+k$均是分点（否则可添加进去），即$s=s_{i_0}$，$s+h=s_{i_0+\alpha}$，$t=t_{j_0}$，$t+k=t_{j_0+\beta}$. 记$\Delta=\{(i_0,j_0),(i_0,j_0+\beta),(i_0+\alpha,j_0)\}$，$L=\{(i,j):0\leqslant i\leqslant i_0,0\leqslant j\leqslant q\}\cup\{(i,j):i_0+1\leqslant i\leqslant r,0\leqslant j\leqslant j_0\}$. 则$A=\{X(z_{ij})\in A_{ij},(i,j)\in L\}=\{X(z_{ij})\in A_{ij},(i,j)\in\Delta\}\cap\{X(z_{ij})\in A_{ij},(i,j)\in L-\Delta\}$.

由于 (7.5)，(7.4) 左方等于

$$\int_A P(s,t;h,k;\xi,B)dP$$

$$=\int_\Lambda P(s,t;h,k;x_{00},x_{01},x_{10},B)H(dx_{00},dx_{01},dx_{10}),\tag{7.9}$$

其中　$\Lambda=A_{i_0j_0}\times A_{i_0,j_0+\beta}\times A_{i_0+\alpha,j_0}$，而对任$D\in\mathscr{E}^3$，记号

$$H(D) = P\{X(z_{ij}) \in A_{ij}, (i,j) \in L - \Delta, \xi \in D\}. \tag{7.10}$$

如果取 $D = D_{i_0 j_0} \times D_{i_0, j_0+\beta} \times D_{i_0+\alpha, j_0}$，则

$$H(D) = F(z_{ij}, B_{ij}, (i,j) \in M_{rq}), \tag{7.11}$$

其中当 $(i, j) \in \Delta$ 时，$B_{ij} = D_{ij}$，当 $(i, j) \in L - \Delta$ 时 $B_{ij} = A_{ij}$，其余的诸 $B_{ij} = E$.

注意 $h = s_{i_0+\alpha} - s_{i_0} = \sum_{l=1}^{\alpha}(s_{i_0+l} - s_{i_0+l-1}), k = t_{j_0+\beta} - t_{j_0} = \sum_{l=1}^{\beta}(t_{j_0+l} - t_{j_0+l-1})$，故可对(7.9)右方表达式反复应用水平转移性(1.1)α次，反复应用竖直转移性(1.2)β次，然后将(7.11)代入(7.9)中，类似于(7.6)的证明，我们得到(7.9)右方等于

$$F(z_{ij}, B_{ij}, (i,j) \in M_{rq}),$$

其中 $(i, j) \in L$ 时 $B_{ij} = A_{ij}$，$B_{i_0+\alpha, j_0+\beta} = B$，其余的诸 $B_{ij} = E$. 而这正是（7.4）的右方. ∎

5.8定理 设 $X = \{X(z), z \in T_+^2\}$ 是随机过程. 如果存在三点转移函数族 $\mathscr{P} = \{P(u,v;s,t):(u,v) \in T_+^2, 0 < (s,t) \in T_+^2\}$，以及两个单参数转移函数族 $\mathscr{P}^a = \{P^a(u,s,\eta,B): u,s \in T_+^a, u < s, \eta \in E, B \in \mathscr{E}\}$，$a=1$，2，使得按定理5.7中的记号，有

$$\begin{aligned}
&P\{X(z_{ij}) \in B_{ij}, (i,j) \in M_{rq}\} \\
&= \int_E P_0(d\eta_{00}) \int_{E^{r+q}} \nu(\eta_{00}, d\eta_{i0}, i \in I_r; d\eta_{0j}, j \in J_q) \\
&\quad \cdot G(z_{ij}, B_{ij}, (i,j) \in M_{rq}; \eta_{00}; \eta_{i0}, i \in I_r; \eta_{0j}, j \in J_q).
\end{aligned} \tag{8.1}$$

其中 $P_0(d\eta_{00}) = P\{X(0,0) \in d\eta_{00}\}$，测度 ν 仅由 $\mathscr{P}^1$，$\mathscr{P}^2$ 确定，它与 $s_0, \cdots, s_r, t_0, \cdots, t_q$ 有关：

$$\begin{aligned}
&\nu(\eta_{00}; d\eta_{i0}, i \in I_r; d\eta_{0j}, j \in I_q) \\
&= \prod_{i=1}^{r} P^1(s_{i-1}, s_i - s_{i-1}, \eta_{i-1,0}, d\eta_{i0}) \\
&\quad \cdot \prod_{j=1}^{q} P^2(t_{j-1}, \eta_{0,j-1}, t_j - t_{j-1}, d\eta_{0j}).
\end{aligned} \tag{8.2}$$

（当 $r=0$ 或 $q=0$ 时，相应的乘积 $\prod_1^0(\cdots)$ 为 1）、函数 G 按(7.3)由 $\mathscr{P}$ 确定. 则 X 是宽过去马氏过程. 如果还假定：对 $s>0$，$t>0$，

$$
\begin{aligned}
&P^{1t}(u,s,y,B) \\
&\equiv \int_E P^1(u,s,x,d\eta)P(u,0;s,t,x,y,\eta,B), \quad t>0, \quad (8.3) \\
&P^{2s}(v,t,y,B) \\
&\equiv \int_E P^2(v,t,x,d\eta)P(0,v;s,t;x,\eta,y,B), \quad s>0, \quad (8.4)
\end{aligned}
$$

均不依赖于 $x\in E$，则 X 是 * 马氏过程.

证　设(8.1)成立. 记 E^{r+q} 上的测度 $\mu(\cdot)=\int_E P_0(d\eta_{00})\nu(\eta_{00},\cdot)$. 由(8.1)知(7.2)成立，再由(8.1)知(7.1)成立. 依定理5.7知，X 是宽过去马氏过程，有三点转移函数族 $\mathscr{P}$.

设(8.3)(8.4)右方不依赖于 $x\in E$. 则易验证，以 $P^{1t}(s,u,y,B)$ 为元素组成的族 $\mathscr{P}^{1t}(t>0)$，以及以 $P^{2s}(t,v,y,B)$ 为元素组成的族 $\mathscr{P}^{2s}(s>0)$，均是单参数转移函数族.

为证 X 是 * 马氏过程，只需验证定理3.23中(i)(ii)(iii). (i)已成立，(iii)与(ii)类似. 故我们只证明(ii)，即对固定 $t\in T_+^{(2)}$，$X^t=\{X(s,t),s\in T_+^{(1)}\}$ 关于 $\{\mathscr{F}_s^t,s\in T_+^{(1)}\}$ 是单参数马氏过程. 我们只需证明：对 $0\leqslant s$，$0<u$，$A\in\mathscr{F}_s^t$，有

$$
\int_A P^{1t}(s,u,X(s,t),B)dP=P\{A,X(s+u,t)\in B\}, \tag{8.5}
$$

当固定的 $t=0$ 时，$\mathscr{P}^{10}=\mathscr{P}^1$.

先设 $t>0$，$s>0$. 取 $0=s_0<s_1<\cdots<s_r=s$，$0=t_0<t_1<\cdots<t_q$，并且 $t=$某 t_k，$k\geqslant1$. 只要对 $A=\{X(z_{ij})\in B_{ij},(i,j)\in M_{rq}\}$ 证明(8.5)即可.

由(8.3)，(8.5)的左方等于

$$
\int_E P^1(s,u,x,d\eta_{r+1,0})\int_E P(s,0;u,t;x,\eta_{r0},\eta_{rk},\eta_{r+1,0},B)
$$

$$\cdot P\{A, X(z_{rk}) \in d\eta_{rk}\}. \tag{8.6}$$

因 $t = \sum_{j=1}^{k}(t_j - t_{j-1})$，故利用 $\mathscr{P}$ 的水平转移方程(1.1)k 次，得

$$P\{s,0;u,t;\eta_{r0},\eta_{rk},\eta_{r+1,0},B\}$$
$$= \int_{E^k} \prod_{j=1}^{k} P(s,t_{j-1};u,t_j - t_{j-1};\eta_{r,j-1},\eta_{rj},\eta_{r+1,j-1},d\eta_{r+1,j})$$
$$\cdot I_B(\eta_{r+1,j}). \tag{8.7}$$

由水平转移性的定义知，上式中对任意的 $\eta_{r1},\cdots,\eta_{r,k-1} \in E$ 成立.

由于假定（8.3）右方与 $x \in E$ 无关，故（8.6）亦然，于是我们可以把（8.6）中的 x 换成 η_{r0}，然后将（8.7）代入（8.6）中，再与（8.1）（8.2）比较，我们得（8.6）等于

$$P(X(z_{ij}) \in B_{ij},(i,j) \in M_{r+1,q}).$$

其中 $t_{r+1} = s+u$，$B_{r+1,k} = B$，$B_{r+1,j} = E$ 对 $j \in I_q - \{k\}$. 而这，正好等于（8.5）的右方. 故（8.5）成立.

当 $t>0$，$s=0$，可类似地证明（8.5）成立. 此时仍需利用（8.3）右方与 $x \in E$ 无关的假定. ∎

同样可类似地证明：当 $t=0$，$s \geqslant 0$时，（8.5）仍成立. 此时，当然无需利用（8.3）右方对 $t>0$与 $x \in E$ 无关的假设.

5.9定义 称定理5.7中的过程为规则宽过去马氏过程.

5.10定义 设 X 是过程. 如果过程 $X^{(1)} = \{X(s,0),s \in T_+^{(1)}\}$，$X^{(2)} = \{X(0,t),t \in T_+^{(2)}\}$ 均是单参数马氏过程，称 X 是马氏初值的.

5.11定义 设 $\mathscr{P}$ 是三点转移函数族，$\mathscr{P}^a$（$a=1,2$）是单参数转移函数族. 则称（$\mathscr{P}^1$，$\mathscr{P}^2$，$\mathscr{P}$）为（转移函数）联合族. 如果 $\mathscr{P}^1$，$\mathscr{P}^2$，$\mathscr{P}$ 均是齐次的，称（$\mathscr{P}^1$，$\mathscr{P}^2$，$\mathscr{P}$）为齐次联合族. 如果（8.3）（8.4）不依赖于 $x \in E$，则称（$\mathscr{P}^1$，$\mathscr{P}^2$，$\mathscr{P}$）为（转移函数）相容族，或称为 * （转移函数）族.

定理5.8中的过程 X 是规则宽马氏过程，其三点转移函数族为 $\mathscr{P}$，X 还是马氏初值的，且 $X^{(a)}$的转移函数族是 $\mathscr{P}^a$，$a=1,2$.

我们称定理5.8中的过程 X 为 $(\mathscr{P}^1, \mathscr{P}^2, \mathscr{P})$ 宽过去马氏过程. 如果 $(\mathscr{P}^1, \mathscr{P}^2, \mathscr{P})$ 是相容族，称 X 为 $(\mathscr{P}^1, \mathscr{P}^2, \mathscr{P})$ * 马氏过程.

5.12定理 设 $(E, \mathscr{E})$ 是 σ 紧距离可测空间，或当 T_+^2 可数时，$(E, \mathscr{E})$ 为任意可测空间. 给定三点转移函数族 $\mathscr{P}$（可以非齐次）.

(i) 给定参数集为 $\lambda_0 = \{(s,0): s \in T_+^{(1)}\} \cup \{(0,t): t \in T_+^{(2)}\}$ 的相容有限维分布族 $\mathscr{M} = \{\mu = \mu_{a_1 a_2 \cdots a_l}: a_1, \cdots, a_l \in \lambda_0, l = 1, 2, \cdots\}$. 按 (7.1) 右方确定 $F(z_{ij}, B_{ij}, (i, j) \in M_{rq})$. 则存在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 及定义在其上的过程 $X = \{X(z), z \in T_+^2\}$，使 (7.1) 成立.

(ii) 给定两个单参数的转移函数族 $\mathscr{P}^1$，$\mathscr{P}^2$（可以非齐次）. 给定 $(E, \mathscr{E})$ 上的概率分布 P_0. 按 (8.1) 右方确定 $F(z_{ij}, B_{ij}, (i, j) \in M_{rq})$. 则存在概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 及定义在其上的过程 $X = \{X(z), z \in T_+^2\}$，使 (8.1) 成立.

证 令 $\Omega = \prod_{z \in T_+^2} E_z$，$E_z = E$，即 $\omega \in \Omega$ 是定义域为 T_+^2 的 E 值函数 $\omega = \{\omega(z), z \in T_+^2\}$. 令 $\mathscr{F} = \prod_{z \in T_+^2} \mathscr{E}_z$，$\mathscr{E}_z = \mathscr{E}$，即 $\mathscr{F}$ 是由有限维柱集

$$C_{rq} = \{\omega: \omega(z_{ij}) \in B_{ij}, (i,j) \in M_{rq}\}. \tag{12.1}$$

所产生的 σ 域，(12.1) 中的记号同定理5.7. 定义 $P(C_{rq})$ 为(i)或(ii)中的 $F(z_{ij}, B_{ij}, (i,j) \in M_{rq})$. 依(i)或(ii)中的假定，易见诸 F 形成的族是参数集为 T_+^2 的相容的有限维分布族，依照 Kolmogorov 相容性定理和 Tulcea 定理（王梓坤[1]，第446，449，460页），可唯一地将 $P(C_{rq})$ 拓展至 $\mathscr{F}$ 上而成为 $\mathscr{F}$ 上的概率测度. 令

$$X(z, \omega) = \omega(z), z \in T_+^2, \tag{12.2}$$

则 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 及 X 为所求. ∎

§5.3 马氏初值的规则宽过去马氏过程

设 $(\mathscr{P}^1, \mathscr{P}^2, \mathscr{P})$ 是转移函数相容族. 设 $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n$，

$0=t_0<t_1<\cdots<t_n, \alpha=(y_1,\cdots,y_n)\in E^n, \beta=(x_1,\cdots,x_n)\in E^n$, $B_1,\cdots,B_n\in\mathscr{E}, (u,v)\geqslant 0, (s,t)>0$. 定义

$$P^{1,t_1,\cdots,t_n}(u,s,\alpha,B_1\times\cdots\times B_n)$$
$$=\int_E P^1(u,s,y_0,d\eta_0)\cdot$$
$$\int_{E^n}\prod_{i=1}^n P(u,t_{i-1};s,t_i-t_{i-1};y_{i-1},y_i,\eta_{i-1},d\eta_i)I_{B_i}(\eta_i). \tag{12.3}$$

$$P^{2,s_1,\cdots,s_n}(v,t,\beta,B_1\times\cdots\times B_n)$$
$$=\int_E P^2(v,t,x_0,d\eta_0)\cdot$$
$$\int_{E^n}\prod_{j=1}^n P(v,s_{j-1};t,s_j-s_{j-1};x_{j-1},x_j,\eta_{j-1},d\eta_j)I_{B_j}(\eta_j). \tag{12.4}$$

由 (8.3) (8.4) 及归纳法知，(12.3) 与 $y_0\in E$ 无关，(12.4) 与 $x_0\in E$ 无关. 且由三点转移函数族的定义知，由 (12.3) (12.4) 确定的族 $\mathscr{P}^{1,t_1,\cdots,t_n}$，$\mathscr{P}^{2,s_1,\cdots,s_n}$ 均是 $(E^n,\mathscr{E}^n)$ 上的单参数转移函数族.

5.13定理 设 $X=\{X(z),z\in T_+^2\}$，是 $(\mathscr{P}^1,\mathscr{P}^2,\mathscr{P})$ * 马氏过程，$0=s_0<s_1<\cdots<s_n$，$0=t_0<t_1<\cdots<t_n$. 令

$$X^{1,t_1,\cdots,t_n}=\{(X(s,t_1),\cdots,X(s,t_n)):s\in T_+^{(1)}\},$$
$$X^{2,s_1,\cdots,s_n}=\{X(s_1,t),\cdots,X(s_n,t):t\in T_+^{(2)}\},$$

则 $X^{1,t_1,\cdots,t_n}$ 关于 $\{\mathscr{F}_s^1,s\in T_+^{(1)}\}$，$X^{2,s_1,\cdots,s_n}$ 关于 $\{\mathscr{F}_t^2,t\in T_+^{(2)}\}$ 均是状态空间为 $(E^n,\mathscr{E}^n)$ 的单参数规则马氏过程，其转移函数族分别是 $\mathscr{P}^{1,t_1,\cdots,t_n}$，$\mathscr{P}^{2,s_1,\cdots,s_n}$.

当 $n=1$ 时，定理5.8中已经证明. 对 $n>1$ 时的证明类似，我们从略了.

5.14 注 定理 5.13 中，$(\mathscr{P}^1,\mathscr{P}^2,\mathscr{P})$ 相容的条件是不可去掉的. 以齐次情形来举反例. 设 $E=R^n$，$P(s,t;x,y,z,B)$ 关于 y,z 连续，$P^1(s,x,B)$，$P^2(t,x,B)$ 分别有正的密度 $f^1(s,x,y)$，$f^2(t,x,$

y). 设 X 在原点的分布为 P_0，有正的密度 $f(x)$. 假若 $X^{II}=\{X(s,t),s\geqslant 0\}$ 关于 $\{\mathscr{F}_s^1,s\geqslant 0\}$ 是规则马氏过程. 具有转移函数 $q(s,y,B)$，则必定对任意 $x\in E$ 成立：

$$q(s,y,B)=\int_E P^1(s,x,d\eta)P(s,t;x,y,\eta,B). \qquad (14.1)$$

实际上，由 (8.1)，对 A_1，$A_2\in\mathscr{E}$，

$$\begin{aligned}&P\{X(0)\in A_1,X(0,t)\in A_2,X(s,0)\in E,X(s,t)\in B\}\\&=\int_{A_1}f(x)dx\int_{A_2}f^2(t,x,\eta_{01})d\eta_{01}\int_E f^1(s,x,\eta_{10})\\&\quad\cdot P(s,t;x,\eta_{01},\eta_{10},B)d\eta_{10}.\end{aligned} \qquad (14.2)$$

另一方面，由于 X^{II}的马氏性

$$P\{X(s,t)\in B|\mathscr{F}_0^1\}=P\{X(s,t)\in B|X(0,t)\}=q(s,X(0,t),B), \qquad (14.3)$$

从而如果记 $\Lambda=\{X(0)\in A_1,X(0,t)\in A_2\}$,则(14.2) 左方等于

$$\begin{aligned}&\int_\Lambda q(s,X(0,t),B)dP\\&=\int_{A_1}f(x)dx\int_{A_2}f^2(t,x,\eta_{01})q(s,\eta_{01},B)d\eta_{01}.\end{aligned} \qquad (14.4)$$

由于 A_1，A_2任意，比较 (14.2) (14.4) 得 (14.1).

5.15定理 设 X 是 $(\mathscr{P}^1,\mathscr{P}^2,\mathscr{P})$ $*$ 马氏过程. 则 X 具有单点马氏性，其单点转移函数族由下式给出：$a\in E$，$(s,t)\in T_+^2$，$0<(u,v)\in T_+^2$，有

$$\begin{aligned}&P((s,t),a;(s+u,t+v),B)\\&=\int_E P^1(s,u;c,d\xi_1)\int_E P(s,0;u,t;c,a,\xi_1,d\xi_2)\\&\quad\cdot\int_E P^2(t,v;b,d\eta_1)\int_E P(0,t;s,v;b,\eta_1,a,d\eta_2)\\&\quad\cdot P(s,t;u,v;a,\eta_2,\xi_2,B).\end{aligned} \qquad (15.1)$$

证 由相容性条件 (8.3) (8.4)，易知 (15.1) 右方与 b，c 无关.

要证：对任意 $0\leqslant(s,t)$，$0<(s,t)$，有

$$P\{X(s+u,t+v)\in B|\mathscr{F}_{s,t}\}$$
$$=P((s,t),X(s,t);(s+u,t+v),B) \tag{15.2}$$
即要证：对 $A\in\mathscr{F}_{s,t}$，
$$P\{A,X(s+u,t+v)\in B\}$$
$$=\int_A P((s,t),X(s,t);(s+u,t+v),B)dP. \tag{15.3}$$
设 $0=s_0<s_1<\cdots<s_r=s<s_{r+1}=s+u,0=t_0<t_1<\cdots<t_q=t<t_{q-1}=t+v$. 只要对 $A=\{X(z_{ij})\in B_{ij},0\leqslant i\leqslant r,0\leqslant j\leqslant q\}$ 证明(15.3)即可. 而这，可以运用(8.1)，类似定理 5.8 的证明，可得(15.3)，从略. ∎

5.16定理 设 X 是随机过程，$\mathscr{P}$ 是三点转移函数族. 如果对任意 $0\leqslant(s,t)$，$0<(h,k)$，$B\in\mathscr{E}$，有
$$P\{X(s+h,t+k)\in B|\mathscr{F}^*_{s,t}\}$$
$$=P(s,t;h,k;X(s,t),X(s,t+k),X(s+h,t),B), \tag{16.1}$$
则 (7.1) 成立. 反之亦然.

证 此定理的证明实质上已蕴含在定理5.7的证明中，从略. ∎

§5.4 宽过去马氏过程的强马氏性

记 $\overline{T^2_+}=T^2_+\cup\{(\infty,\infty)\}$.

5.17定义 弱停点的定义见§1.2，即弱停点是取值于$\overline{T^2_+}$的随机向量 $H=(\alpha,\beta)$，且满足
$$(H\leqslant z)\in\mathscr{F}^*_z,\forall z\in T^2_+. \tag{17.1}$$
弱停点 H 称为弱可料点，如果存在上升的弱停点列 H_n，$n\geqslant1$，使 $H_n\uparrow H$，而在 $(H>0)$ 上有
$$H_n<H,\forall n. \tag{17.2}$$
弱停点称为弱可及点，如果存在弱可料点列 H_n，$n\geqslant1$，使
$$[\![H]\!]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}[\![H_n]\!] \tag{17.3}$$

其中 $[\![H]\!] = \{(H(\omega),\omega);\omega \in \Omega\}$ 是 H 的图. 弱停点 H 称为弱绝不可及点, 如 $\forall$ 弱可料点 H_1, $[\![H]\!] \cap [\![H_1]\!]$ 为不足道集, 即 $P(H = H_1) = 0$.

全体弱停点、全体弱可料点、全体弱可及点、全体弱绝不可及点的集合, 分别记为 $\mathscr{O}^*$, $\mathscr{P}^*$, $\mathscr{A}^*$, $\mathscr{T}^*$. 显然 $\overline{T^2_+} \subset \mathscr{O}^*$. 设 $H \in \mathscr{O}^*$, 三个 σ 域 $\mathscr{F}^*_H$, $\mathscr{F}^*_{H-}$, $\mathscr{F}^*_{H+}$ 的定义见 §1.2.

满足 $\overline{T^2_+} \subset \mathscr{M} \subset \mathscr{O}^*$ 的集合 $\mathscr{M}$ 称为 $\mathscr{M}$ 类弱停点集. 今后, 当 $H \in \mathscr{O}^*$ 时, $X(H)$ 恒指 $X(H)I_{(H<\infty)}$.

设 $\mathscr{P} = \{P(s,t),(0,0) < (s,t) \in T^2_+\}$, 记

$$P(s,t;x,y,z,f) = \int f(\xi)P(s,t;x,y,z,d\xi), f \in b\mathscr{E}. \tag{17.4}$$

5.18定义 设 X 是宽过去马氏过程, 有(齐次)三点转移函数族 $\mathscr{P}$. 当 $T^2_+ = R^2_+$ 时, 进一步设 X 的几乎一切轨道都有右极限. 设还满足: 记 $\mathring{z} = H + z$,

(i) 强 $\mathscr{M}$ 可测性: $\forall\ H \in \mathscr{M}, 0 < z \in T^2_+$, 有 $X(H + z) \in \mathscr{F}$, $X(H)$、$X(H \otimes \mathring{z})$、$X(\mathring{z} \otimes H)$ 均 $\in \mathscr{F}^*_H$.

(ii) 强 $\mathscr{M}$ 马氏性: $\forall\ H \in \mathscr{M}$, $f \in b\mathscr{E}$, $0 < z \in T^2_+$, 有

$$E\{f[X(H+z)]I_{(H<\infty)} | \mathscr{F}^*_H\}$$
$$= P(z;X(H),X(H \otimes \mathring{z}),X(\mathring{z} \otimes H),f)I_{(H<\infty)}. \tag{18.1}$$

称 X 为宽过去强 $\mathscr{M}$ 马氏过程.

5.19定义 设 X 和 $\mathscr{P}$ 同定义5.18开头. 设还满足: 记 $\mathring{z} = H + z$,

(i) 强右 $\mathscr{M}$ 可测性: $\forall H \in \mathscr{M}, 0 < z \in T^2_+$, 有 $X(H + z) \in \mathscr{F}$, $X(H+)$、$X[(H \otimes \mathring{z})+]$、$X[(\mathring{z} \otimes H)+]$ 均 $\in \mathscr{F}^*_{H+}$.

(ii) 强右 $\mathscr{M}$ 马氏性: $\forall\ H \in \mathscr{M}$, $f \in b\mathscr{E}$, $0 < z \in T^2_+$, 有

$$E\{f[X(H+z)]I_{(H<\infty)} | \mathscr{F}^*_{H+}\}$$
$$= P(z;X(H+),X[(H \otimes \mathring{z})+],X[(\mathring{z} \otimes H)+],$$

$f)I_{(H<\infty)}$. (19.1)

称 X 为宽过去强右 $\mathscr{M}$ 马氏过程.

5.20 定义 设 X 是宽过去马氏过程,有三点转移函数族 $\mathscr{P}$. 当 $T_+^2=R_+^2$ 时,进一步设 X 的几乎一切轨道在 $R_+^2-\lambda_0$ 上有左极限(对 $z\in\lambda_0$,规定 $X(z-)=X(z)$). 设还满足:记 $\mathring{z}=H+z$,

(i) 强左 $\mathscr{M}$ 可测性:$\forall H\in\mathscr{M}, z\in T_+^2$,有 $X(H+z)\in\mathscr{F}$, $X(H-)$、$X[(H\otimes\mathring{z})-]$、$X[(\mathring{z}\otimes H)-]$ 均 $\in\mathscr{F}_{H-}^*$.

(ii) 强左 $\mathscr{M}$ 马氏性:$\forall H\in\mathscr{M}$, $f\in b\mathscr{E}$, $0<z\in T_+^2$,有

$$E\{f[X(H+z)]I_{(H<\infty)}|\mathscr{F}_{H-}^*\}$$
$$=P(z;X(H-),X[(H\otimes\mathring{z})-],X[(\mathring{z}\otimes H)-],$$
$f)I_{(H<\infty)}$. (20.1)

称 X 为宽过去强左 $\mathscr{M}$ 马氏过程.

5.21注 取 $\mathscr{M}=\mathscr{O}^*$,我们得宽过去强(强左)马氏过程的概念,注意,此时定义5.18(i)中条件"$X(H+z)\in\mathscr{F}$"可除去,因它含于条件"$X(H)\in\mathscr{F}_H^*$"中. 取 $\mathscr{M}=\mathscr{P}^*$,我们得宽过去强可料(强左可料)马氏过程的概念. 类似定义宽过去强可及(强左可及)马氏过程和宽过去强绝不可及(强左不可及)马氏过程,对于前者,取 $\mathscr{M}=\mathscr{A}^*$,但对于后者,要取 $\mathscr{M}=\mathscr{T}^*\vee R_+^2$.

关于 $\{\mathscr{F}_{z+}, z\in R_+^2\}$ 的弱停时、弱可料时、弱可及时、绝不可及时的集合分别记为 $\mathscr{O}_+^*$, $\mathscr{P}_+^*$, $\mathscr{A}_+^*$, $\mathscr{T}_+^*$. 在定义5.19中,取 $\mathscr{M}=\mathscr{O}_+^*$, $\mathscr{P}_+^*$, $\mathscr{A}_+^*$, $\mathscr{T}_+^*$,我们便得到相应的强右、强右可料、强右可及、强右绝不可及马氏过程.

5.22定义 设 $(E,\mathscr{E})$ 是拓扑可测空间. 称三点转移函数族 $\mathscr{P}$ 是拟 Feller 的,如对任意连续函数 $f\in b\mathscr{E}$,由(17.4)确定的 $P(s,t;x,y,z,f)$ 是 (x,y,z) 的连续函数. 宽过去马氏过程 X 称为拟 Feller 的,如果 X 的三点转移函数族 $\mathscr{P}$ 是拟 Feller 的.

下面的引理明显.

5.23引理 设过程 $X=\{X(z),z\in R_+^2\}$ 右连续. 则 $\forall z\in$

R^2_+，限制在 $R^1_z \times \Omega$ 上，X 是 $\mathscr{B}(R^1_z) \times \mathscr{F}^1_z$ 可测的，限制在 $R^2_z \times \Omega$ 上，X 是 $\mathscr{B}(R^2_z) \times \mathscr{F}^2_z$ 可测的. 且 X 有强 $\mathscr{O}^*$ 可测性.

5.24定理 右连续拟 Feller 过程具有宽过去强 $\mathscr{O}^*$ 马氏性.

证 设 $H = (\alpha,\beta) \in \mathscr{O}^*$，$0 < z$. 要证（18.1）成立.

不难证明，(18.1)右边是 $\mathscr{F}^*_H$ 可测的，故只要证：$\forall A \in \mathscr{F}^*_H$，$f \in b\mathscr{E}$，有

$$\int_A f[X(H-z)]I_{(H<\infty)}dP$$

$$= \int_A P(z;X(H),X(H \otimes \mathring{z}),X(\mathring{z} \otimes H),f)I_{(H<\infty)}dP. \tag{24.1}$$

由单调类定理，只需对连续函数 $f \in b\mathscr{E}$ 证明上式即可.

如 $\alpha \in [(j-1)/2^n, j/2^n]$，令 $\alpha_n = j/2^n$；如 $\alpha = \infty$，令 $\alpha_n = \infty$. 类似定义 β_n. 令 $H_n = (\alpha_n,\beta_n)$，$A(n,i,j) = A \cap (\alpha_n = i/2^n, \beta_n = j/2^n)$. 易知 $A(n,i,j) \in \mathscr{F}_{i2^{-n},j2^{-n}}$，利用宽过去马氏性，

$$\int_A f[X(H_n+z)]I_{(H<\infty)}dP$$

$$= \int_A P(z;X(H_n),X(H_n \otimes \mathring{z}),X(\mathring{z} \otimes H_n),f)I_{(H<\infty)}dP.$$

令 $n \to \infty$. 由 X 的右连续性，f 有界连续，上式左方趋于（24.1）左方；由 X 的右连续性和拟 Feller 性，上式右方趋于（24.1）右方. 故（24.1）成立. ∎

5.25注 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 完备时，定理5.24中右连续条件可减弱为"几乎一切轨道右连续".

下面三个定理是显然的.

5.26定理 设 $\mathscr{M}_a$ $(a=1,2)$ 是 $\mathscr{M}$ 类弱停点集，$\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_2$. 则宽过去强（相应地，强左，强右）$\mathscr{M}_1$马氏过程必是宽过去强（相应地，强左，强右）$\mathscr{M}_2$马氏过程.

5.27定理 设 $X = \{X(z), z \in R^2_+\}$ 是宽过去马氏过程，$(E, \mathscr{E})$ 是距离可测空间. 设 X 的几乎一切轨道右连续，$\overline{R^2_+} \subset \mathscr{M} \subset$

$\mathscr{O}^*$. 则 X 有宽过去强右 $\mathscr{M}$ 马氏性 $\Longrightarrow X$ 有宽过去强 $\mathscr{M}$ 马氏性. 如设 $(\mathscr{F}_z, z \in R_+^2)$ 右连续，则"$\Longrightarrow$"可改为"$\Longleftrightarrow$".

5.28定理 设 $X = \{X(z), z \in R_+^2\}$ 为宽过去马氏过程，几乎一切轨道在 $R_+^2 - \lambda_0$ 上左连续，$\overline{R_+^2} \subset \mathscr{M} \subset \mathscr{O}^*$. 设 $\forall H \in \mathscr{M}, 0 < z \in R_+^2$，记 $\mathring{z} = H + z$，有 $X(H \otimes z)$、$X(z \otimes H)$ 均 $\in \mathscr{F}_H^*$. 则 X 有宽过去强 $\mathscr{M}$ 马氏性 $\Longrightarrow X$ 有宽过去强左 $\mathscr{M}$ 马氏性.

下面的两个引理容易证明.

5.29引理 设 $M, H \in \mathscr{O}^*$. 则

(i) H 为 $\mathscr{F}_H^*$ 可测.

(ii) $M \leqslant H \Longrightarrow \mathscr{F}_M^* \subset \mathscr{F}_H^*$.

(iii) $M \vee H \in \mathscr{O}^*$.

(iv) $A \in \mathscr{F}_{M \vee H}^* \Longrightarrow A \cap (M \leqslant H) \in \mathscr{F}_H^*, A \cap (M = H) \in \mathscr{F}_M^* \cap \mathscr{F}_H^*$.

5.30引理 设 $M, H \in \mathscr{O}^*$，$f \in b\mathscr{E}$，$\forall z \in R_+^2$，$X(M+z) \in \mathscr{F}$，则

$$I_{(M=H)} E\{f[X(M+z)] I_{(M<\infty)} | \mathscr{F}_M^*\}$$
$$= I_{(M=H)} E\{f[X(M+z)] I_{(M<\infty)} | \mathscr{F}_H^*\}.$$

设 $H \in \mathscr{O}^*$, $A \in \mathscr{F}$，称 $H_A = H \cdot I_A + \infty \cdot I_{A^c}$ 为 H 在 A 上的限制.

5.31定理 X 是宽过去强马氏过程 $\Longleftrightarrow X$ 是宽过去强可及和强绝不可及马氏过程.

证 由定理5.27，只需证明充分性. $\forall H = (\alpha, \beta) \in \mathscr{O}^*$，由于 $(H < \infty)$ 能唯一地表示成 A 与 B 的不交并，使得 $H_A = (\alpha_A, \beta_A) \in \mathscr{A}^*$，$H_B = (\alpha_B, \beta_B) \in \mathscr{T}^*$. 于是 $[\![H]\!] = [\![H_A]\!] + [\![H_B]\!]$.

先证强可测性. $\forall z \in R_+^2$, $D \in \mathscr{E}$，由强可及可测性和强绝不可及可测性，利用引理5.29得

$$\{X(H) \in D, H < \infty\}$$
$$= \{X(H) \in D, H = H_A < \infty\} + \{X(H) \in D,$$

$$H = H_B < \infty\}$$
$$= \{X(H_A) \in D, H_A < \infty\}(H = H_A) + \{X(H_B) \in D, H_B < \infty\}(H = H_B) \in \mathscr{F}_H^{\cdot}.$$

类似证$\{X(H \otimes \overset{\circ}{z}) \in D, H < \infty\}$和$\{X(\overset{\circ}{z} \otimes H) \in D, H < \infty\}$均$\in \mathscr{F}_H^{\cdot}$,其中$\overset{\circ}{z} = H + z$.

再证强马氏性．设$f \in b\mathscr{E}$，$z > 0$，记$\overset{\circ}{z}_A = H_A + z$，$\overset{\circ}{z}_B = H_B + z$．由引理5.29和5.30，强可及马氏性和强绝不可及马氏性，有

$$E\{f[X(H + z)]I_{(H<\infty)} | \mathscr{F}_H^{\cdot}\}$$
$$= I_{(H=H_A)}E\{f[X(H + z)]I_{(H<\infty)} | \mathscr{F}_{H_A}^{\cdot}\} + I_{(H=H_B)}E\{f[X(H + z)I_{(H<\infty)} | \mathscr{F}_{H_B}^{\cdot}\}$$
$$= E\{f[X(H_A + z)]I_{(H=H_A)}I_{(H_A<\infty)} | \mathscr{F}_{H_A}^{\cdot}\} + E\{f[X(H_B + z)]I_{(H=H_B)}I_{(H_B<\infty)} | \mathscr{F}_{H_B}^{\cdot}\}$$
$$= I_{(H=H_A)}P(z; x(H_A), X(H_A \otimes \overset{\circ}{z}_A), X(\overset{\circ}{z}_A \otimes H_A), f)I_{(H_A<\infty)} + I_{(H=H_B)}P(z; X(H_B), X(H_B \otimes \overset{\circ}{z}_B), X(\overset{\circ}{z}_B \otimes H_A), f)I_{(H_B<\infty)}$$
$$= P(z; X(H), X(H \otimes \overset{\circ}{z}), X(\overset{\circ}{z} \otimes H), f)I_{(H<\infty)}. \quad \blacksquare$$

类似于定理5.31，我们可以证明

5.32定理　X 为宽过去强右马氏过程$\Longleftrightarrow X$ 是宽过去强右可及和强右绝不可及马氏过程.

§5.5　化为单参数情形

本节指出：对可列 E 和参数 $T_+^2 = Z_+^2$的情形，规则宽过去马氏过程可看作单参数马氏过程，只是状态空间变得复杂了.

5.33假设　E 有限或可列无限，有离散拓扑．令

$$\Omega = E^{Z_+^2} = \{\eta(\cdot): \eta \text{ 是 } Z_+^2 \to E \text{ 的映射}\}. \qquad (33.1)$$

在 Ω 上赋以乘积拓扑. Ω 上的乘积 σ 域记为 $\mathscr{F}$，可测空间（Ω，$\mathscr{F}$）称为典型空间. 以 $\mathscr{C}$ 记（Ω，$\mathscr{F}$）上的概率测度全体.

任给 $P\in\mathscr{C}$. 两参数 E 值过程 $\eta=\{\eta(m,n):(m,n)\in Z_+^2\}$ 定义在（Ω，$\mathscr{F}$，P）上. η 的有限维分布族可由 η 在 λ_0 上的初始分布及 η 的三点转移函数族 $\mathscr{P}$ 唯一决定：

$$\begin{aligned}&P\{\eta(u,v)=i_{uv},0\leqslant u\leqslant m,0\leqslant v\leqslant n\}\\&=P\{\eta(u,0)=i_{u0},0\leqslant u\leqslant m,\eta(0,v)=i_{0v},0\leqslant v\leqslant n\}\\&\cdot\prod_{u=1}^{m}\prod_{v=1}^{n}P\{\eta(u,v)=i_{uv}|\eta(u-1,v-1)\\&=i_{u-1,v-1},\eta(u-1,v)=i_{u-1,v},\eta(u,v-1)=i_{u,v-1}\}.\end{aligned}\tag{33.2}$$

令

$$Z_n=\{(u,v):(u,v)\in Z_+^2,u\wedge v=n\},\Omega_n=E^{Z_n},\tag{33.3}$$

则易见

$$Z_+^2=\bigcup_{n=0}^{\infty}Z_n,\qquad\qquad\Omega=\prod_{n=0}^{\infty}\Omega_n.\tag{33.4}$$

作 Z_n 到整数集 Z 的一一映射 φ_n：

$$\varphi_n(u,v)=u-v,\qquad\qquad(u,v)\in Z_n.\tag{33.5}$$

作 $E^{Z_n}\to E^Z$ 的一一映射 ψ_n：

$$\tilde{\eta}_n(u,v)=\psi_n(\eta)(u-v)=\eta(u,v),\eta\in\Omega_n,(u,v)\in Z_n.\tag{33.6}$$

显然，在映射 φ_n 和 ψ_n 下，可将 Z_n 与 Z 看作同一集合，把 Ω_n 与 E^Z 看作同一空间. ψ_n 是 Ω_n 至 E^Z 的同构映射. E^Z 上的乘积 σ 域记为 $\mathscr{B}$.

考虑（E^Z，$\mathscr{B}$）的可列维乘积空间（$(E^Z)^{Z_+}$，$\mathscr{B}^{Z_+}$），并以 $\tilde{\mathscr{C}}$ 记其上的概率测度全体. $\forall P\in\mathscr{C}$，$G_i\in\mathscr{B}$，$n_i\in Z_+$，$1\leqslant i\leqslant k$，令

$$\begin{aligned}&\tilde{P}\{(\tilde{\eta}_0,\tilde{\eta}_1,\cdots)\in(E^Z)^{Z_+}:\tilde{\eta}_{n_1}\in G_1,\cdots,\tilde{\eta}_{n_k}\in G_k\}\\&=P\{(\eta_0,\eta_1,\cdots)\in\Omega:\eta_{n_1}\in\psi_{n_1}^{-1}(G_1),\cdots,\eta_{n_k}\in\psi_{n_k}^{-1}(G_k)\}.\end{aligned}\tag{33.7}$$

其中 $\tilde{\eta}_0$，$\tilde{\eta}_1$，…的定义见（33.6）．由乘积概率空间的知识不难看出，（33.7）建立了 $\mathscr{C}$ 与 $\tilde{\mathscr{C}}$ 之间的一一对应．对任意 $\tilde{P}\in\tilde{\mathscr{C}}$，在概率空间（$(E^Z)^{Z_+}$，$\mathscr{B}^{Z_+}$，$\tilde{P}$）上，$(\tilde{\eta}_n, n\in Z_+)$ 是单参数随机过程，参数集是 Z_+，状态空间是 E^Z．

5.34定理 设 $P\in\mathscr{C}$．$\{\eta(m,n):(m,n)\in Z_+^2\}$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上的宽过去马氏过程，状态空间是 E．以 $\tilde{P}$ 记由（33.7）定义的概率测度，$\{\tilde{\eta}_n, n\in Z_+\}$ 由（33.6）定义．则 $\{\tilde{\eta}_n, n\in Z_+\}$ 是概率空间（$(E^Z)^{Z_+}$，$\mathscr{B}^{Z_+}$，$\tilde{P}$）上的单参数马氏过程，状态空间是 E^Z．

证 设 n，$u\in Z_+$，$n\geqslant u$，$\tilde{\eta}\in E^Z$，$G\in\mathscr{B}$，且有形式

$$G=\{\nu\in E^Z:\nu(k)=i_k,-l\leqslant k\leqslant s\},l,s\in Z_+,i_k\in E. \tag{34.1}$$

令

$$\begin{aligned}\tilde{P}(u,\tilde{\eta},n,G)&=P\{(\eta_0,\eta_1,\cdots)\in\Omega:\eta_n\in\psi_n^{-1}(G)\mid\eta_u\\&=\psi_u^{-1}(\tilde{\eta})\}=P\{\eta\in\Omega:\eta(n,n+k)=i_{-k},0\leqslant k\leqslant l,\\&\quad\eta(n+h,n)=i_h,0\leqslant h\leqslant s\mid\eta(v,t)\\&=\tilde{\eta}(v-t),(v,t)\in Z_u\}.\end{aligned} \tag{34.2}$$

由于 G 是 E^Z 的有限维柱集，所以 $\psi_n^{-1}(G)$ 是 η 的有限维柱集．由 Kolmogorov 定理，固定 u，$n\in Z_+$，$u\leqslant n$，$\tilde{\eta}\in E^Z$，$\tilde{P}(u,\tilde{\eta},n,\cdot)$ 可以扩张成 $(E^Z,\mathscr{B})$ 上的测度．固定 u，$n\in Z_+$，$u\leqslant n$ 及形如（34.1）的 G，$\tilde{P}(u,\cdot,n,G)$ 是 $\tilde{\eta}$ 的 $\mathscr{B}$ 可测函数．因此，$\tilde{P}(u,\tilde{\eta},n,G)$（$u$，$n\in Z_+$，$u\leqslant n$，$\tilde{\eta}\in E^Z$，$G\in\mathscr{B}$）确是 $(E^Z,\mathscr{B})$ 上的转移概率族．最后只需证明：$\forall\, G\in\mathscr{B}$，$u\leqslant n$，有

$$\tilde{P}(\tilde{\eta}_n\in G\mid\tilde{\eta}_u=\tilde{\eta})=\tilde{P}(u,\tilde{\eta},n,G), \tag{34.3}$$

假定 G 有形式（34.1），则由（33.7）有

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\tilde{\eta}_n\in G\mid\tilde{\eta}_u=\tilde{\eta})&=P(\eta=(\eta_0,\eta_1,\cdots)\in\Omega:\\&\quad\eta_n\in\psi_n^{-1}(G)\mid\eta_u=\psi_u^{-1}(\tilde{\eta})\},\end{aligned} \tag{34.4}$$

从而由（34.2）得（34.3）．对一般的 $G\in\mathscr{B}$，仍应用 Kolmogorov 定理知（35.3）成立． ∎

上述定理指出了两参数宽过去马氏过程与单参数马氏过程间

的联系．因此，两参数宽过去马氏过程的某些问题可以化为单参数马氏过程的相应问题．下面举一例说明．

5.35例 考虑时间齐次的马氏过程 $\{\eta(u,v),(u,v)\in Z_+^2\}$．记 $\eta_{uv}=\eta(u,v)$．

$$P(i,j,k,r)=P(\eta_{11}=r\mid\eta_{00}=i,\eta_{01}=j,\eta_{10}=k),\tag{35.1}$$

则过程的有限维分布公式（33.2）成为

$$\begin{aligned}&P(\eta_{uv}=i_{uv},0\leqslant u\leqslant m,0\leqslant v\leqslant n)\\&\quad=P(\eta_{u0}=i_{u0},0\leqslant u\leqslant m,\\&\eta_{0v}=i_{0v},0\leqslant v\leqslant n)\prod_{u=1}^{m}\prod_{v=1}^{n}P(i_{u-1,v-1},i_{u-1,v},i_{u,v-1},i_{uv}).\end{aligned}\tag{35.2}$$

此时相应于定理中的过程 $\{\tilde{\eta}_n,n\in Z_+\}$ 是单参数时间齐次马氏过程，其转移概率族是

$$\begin{aligned}\tilde{P}(u,\tilde{\eta},n,G)&=\tilde{P}(n-u,\tilde{\eta},G)\\&=P\{\eta=(\eta_0,\eta_1,\cdots)\in\Omega:\\&\eta_{n-u}\in\psi_{n-u}^{-1}(G)\mid\eta_0=\psi_0^{-1}(\tilde{\eta})\},n\geqslant u.\end{aligned}\tag{35.3}$$

其中 $G\in\mathscr{B}$．令 $n-u-1$，并取 G 为（34.1）的有限维柱集．令

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\tilde{\eta},G)&=\tilde{P}(1,\tilde{\eta},G)=P\{\eta\in\Omega:\eta_{1,1+k}=i_{-k},\\&0\leqslant k\leqslant l,\eta_{1+h,1}=i_h,0\leqslant h\leqslant s\mid\eta(v,0)=\tilde{\eta}(v),\eta(0,t)\\&=\tilde{\eta}(-t),v,t\in Z_+\}.\end{aligned}\tag{35.4}$$

于是固定 $\tilde{\eta}\in E^Z$，$\tilde{P}(\tilde{\eta},\cdot)$ 是 $\mathscr{B}$ 上的测度（由有限维分布扩张到 $\mathscr{B}$ 上）．固定 $G\in\mathscr{B}$，$\tilde{P}(\cdot,G)$ 是 $\mathscr{B}$ 可测函数，故 $\{\tilde{P}(\tilde{\eta},G):\tilde{\eta}\in E^Z,G\in\mathscr{B}\}$ 是 $(E^Z,\mathscr{B})$ 上的转移概率族，而 $\{\tilde{\eta}_n,n\in Z_+\}$ 是以 $\tilde{P}(\cdot,\cdot)$ 为一步转移概率的单参数时齐马氏过程．

$(E^Z,\mathscr{B})$ 上的概率测度 $\pi(\cdot)$ 称为 $\{\tilde{\eta}_n,n\in Z_+\}$ 的平稳分布，如果 $\forall G\in\mathscr{B}$，有

$$\int\tilde{P}(\tilde{\eta},G)\pi(d\tilde{\eta})=\pi(G).\tag{35.5}$$

特别．如果 G 是形如（34.1）的集合，上式成为

$$\sum_{j_k \in E, -l-1 \leqslant k \leqslant s+1} \pi\{\nu \in E^Z : \nu(k) = j_k, -l-1 \leqslant k \leqslant s+1\}$$

$$\cdot P(j_0, j_{-1}, j_1, j_0) \prod_{h=0}^{l-1} P(1, 1, j_{-h-1}, j_{-h-2}, j_{-h},$$

$$i_{-h+1}) \cdot \prod_{h=0}^{s-1} P(j_{h+1}, i_h, j_{h+2}, i_{h-1})$$

$$= \pi\{\nu \in E^Z : \nu(k) = i_k, \quad -l \leqslant k \leqslant s\}. \tag{35.6}$$

于是我们得到两参数宽过去时齐马氏过程平稳分布的定义：

5.36定义 设 $\{\eta_{mn}, (m, n) \in Z_+^2\}$ 是两参数宽过去时齐马氏过程，$\pi(\cdot)$ 是 $(E^Z, \mathscr{B})$ 上的概率测度，如果对任意 l, $s \in Z_+$, $i_k \in E$, $-l \leqslant k \leqslant s$, (35.6) 成立，称 $\pi(\cdot)$ 是 $\{\eta_{mn}, (m, n) \in Z_+^2\}$ 的平稳分布.

§5.6 在梯形域上的预测

设 $z_1 < z_2$, $B = [z_1, z_2]$. X 关于 B 的转移概率有如下结果.

5.37定理 设 X 是宽将来马氏过程，$z \notin B$. 当 $z \leqslant z_1$ 或 $z \geqslant z_1$ 时，$\forall \xi \in \sigma(X(z))$，有

$$E\{\xi | \overset{o}{\mathscr{F}}(B)\} = E\{\xi | X(z_0)\}. \tag{37.1}$$

其中，z_0是 ∂B 上到点 z 的最近距离点.

证 当 $z \leqslant z_1$时，$z_0 = z_1$且 $z \in R_{z_1}$. 对 $D = B$, 在 z_1处利用定理3.7便得 (37.1). 当 $z \geqslant z_1$时，因 $B \subset R_{z_2}$, 对 $D = \{z\}$ 在 z_2处利用定理3.7便得证 (37.1). ∎

5.38注 从定理5.37的证明看出，定理5.37中的 B 还可以推广为更一般的区域.

5.39定义 称 R_+^2 中的分割线（见§1.2）为简单折线，如果它由有限或可列多条平行于坐标轴之一的直线段组成，而且在任意 R_z 内只有有限多条直线段. 由坐标轴 λ_0和简单折线 L 围成的闭区域称为梯形域，记为 $[0, L]$.

关于梯形域的转移概率，有如下定理.

5.40定理 设$X=\{X(z), z\in R_+^2\}$是宽过去马氏过程，z为梯形域$K=[0, L]$外的任一点. z_0和z_{n+1}为z在L上的水平和竖直投影，z_1，…，z_n为位于z_0和z_{n+1}之间的L的角点，见示意图3.

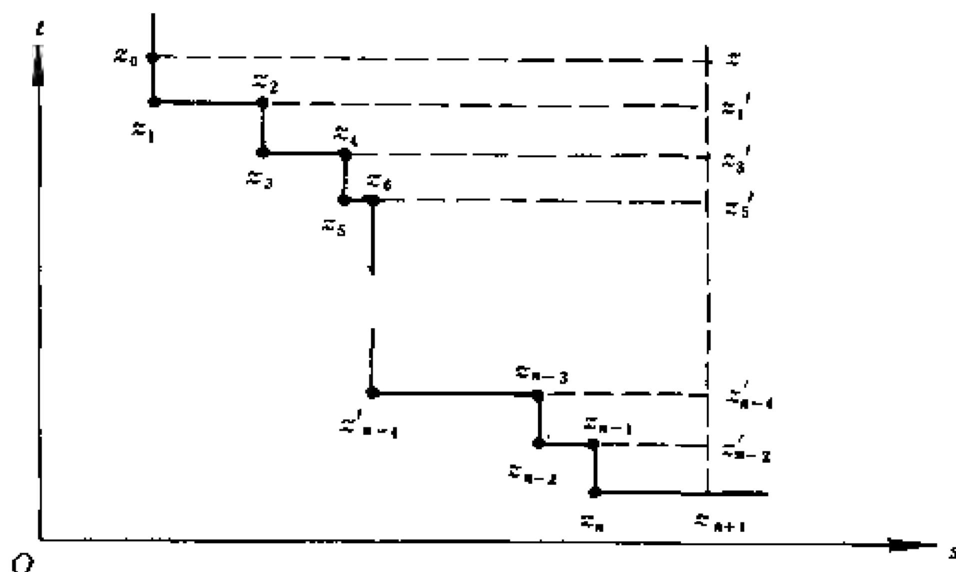


图3

则$\forall f\in b\mathscr{E}$，有

$$
\begin{aligned}
&E\{f[X(z)]|\mathring{\mathscr{F}}(K)\}\\
&=E\{f[X(z)]|X(z_0),X(z_1),\cdots,X(z_{n-1})\}. \qquad (40.1)
\end{aligned}
$$

证 不妨设$n=3$，对一般的n不难用归纳法证明. 因$\mathring{\mathscr{F}}(K)\supset\sigma\{X(z_0), \cdots ,X(z_4)]\equiv\mathscr{C}$，故为证（40.1），只要证

$$
E\{f[X(z)]|\mathring{\mathscr{F}}(K)\}\in\mathscr{C} \qquad (40.2)
$$

如图3，过z_1作水平直线与过z的竖直直线交于点z'_1. 由于$\mathring{\mathscr{F}}(K)\subset\mathscr{F}_{z_1}^*$，利用$X$在$z_1$处的宽过去马氏性，得

$$
\begin{aligned}
&E\{f[X(z)]|\mathring{\mathscr{F}}(K)\}\\
&=E\{E(f[X(z)]|\mathscr{F}_{z_1}^*)|\mathring{\mathscr{F}}(K)]
\end{aligned}
$$

$$= E\{E(f[X(z)]|X(z_0),X(z_1),X(z_1'))|\mathring{\mathscr{F}}(K)\}. \tag{40.3}$$

故为证 (40.2)，只要证：$\forall f_0$，f_1，$f_1'\in b\mathscr{E}$，有

$$E\{f_0[X(z_0)]f_1[X(z_1)]f_1'[X(z_1')]|\mathring{\mathscr{F}}(K)\} \in \mathscr{C}. \tag{40.4}$$

因 $z_0,z_1\in L\subset K$. 上式左方因子 $f_0[X(z_0)]f_1[X(z_1)]$ 可自条件期望内提出，且本身已是 $\mathscr{C}$ 可测，故问题化为证明

$$E\{f_1'[X(z_1')]|\mathring{\mathscr{F}}(K)\} \in \mathscr{C}. \tag{40.5}$$

由于 $\mathring{\mathscr{F}}(K)\subset \mathscr{F}^*_{z_3}$，并在 z_3 处用 X 的宽过去马氏性，得

$$\begin{aligned}&E\{f_1'[X(z_1')]|\mathring{\mathscr{F}}(K)\}\\ &= E\{E(f_1'[X(z_1')]|\mathscr{F}^*_{z_3})|\mathring{\mathscr{F}}(K)\}\\ &= E\{f_1'[X(z_1')]|X(z_2),X(z_3),X(z_4)\} \in \mathscr{C}.\end{aligned}$$ ∎

5.41定理 假设及记号同定理5.40，设 X 的三点转移函数族 $\mathscr{P} = \{P(s,t):(0,0) < (s,t) \in R^2_+\}$. 则 $\forall\ \xi_i \in E(0\leqslant i\leqslant n+1)$，$B\in\mathscr{E}$，有

$$\begin{aligned}&P\{X(z) \in B|X(z_i) = \xi_i,0\leqslant i\leqslant n+1\}\\ &= \int_E P(s_{n+1}-s_n,t_{n-1}-t_n;\xi_n,\xi_{n-1},\eta_n,d\eta_{n-2})\\ &\cdot \int_E P(s_{n+1}-s_{n-2},t_{n-3}-t_{n-2};\xi_{n-2},\xi_{n-3},\eta_{n-2},d\eta_{n-4})\cdots\\ &\cdot \int_E P(s_{n+1}-s_3,t_2-t_3;\xi_3,\xi_2,\eta_3,d\eta_1)\\ &\cdot P(s_{n+1}-s_1,t_0-t_1;\xi_1,\xi_0,\eta_1,B).\end{aligned} \tag{41.1}$$

证 不妨设 $n=3$. 记 $\varphi[X(z_1')] = P\{X(z)\in B|X(z_0)=\xi_0$, $X(z_1)=\xi_1$, $X(z_1')\}$, $\varphi\in b\mathscr{E},\mathscr{C}=\sigma\{X(z_i),\ 0\leqslant i\leqslant 4\}$.

则 $\quad P\{X(z) \in B|X(z_i) = \xi_i,0\leqslant i\leqslant 4\}$

$$= P\{X(z) \in B|\mathscr{C}\}|_{X(z_i)=\xi_i, 0\leqslant i\leqslant 4}$$
$$= E\{P[X(z) \in B|\mathscr{F}^*_{z_1}]|\mathscr{C}\}|_{X(z_i)=\xi_i, 0\leqslant i\leqslant 4}$$
$$= E\{P[X(z) \in B|X(z_0), X(z_1), X(z'_1)]|\mathscr{C}\}|_{X(z_i)=\xi_i, 0\leqslant i\leqslant 4}$$
$$= E\{\varphi[X(z_1')]|\mathscr{C}\}|_{X(z_i)=\xi_i, 0\leqslant i\leqslant 4}. \tag{41.2}$$

在最后的条件期望中插入条件 $\mathscr{F}^*_{z_3}\supset\mathscr{C}$，仿上面推导得上式

$$E\{\varphi[X(z_1')]|\mathscr{C}\}=E\{\varphi[X(z_1')]|X(z_3),X(z_2),X(z_4)\}$$

代入（41.2）中得（41.2）左方等于

$$E\{\varphi[X(z')]|X(z_3) = \xi_3, X(z_2) = \xi_2, x(z_4) = \xi_4\}$$
$$= \int_E \varphi(\eta_1)P(s_4 - s_3, t_2 - t_3; \xi_3, \xi_2, \xi_4, d\eta_1)$$
$$= \int_E P(s_4 - s_1, t_0 - t_1; \xi_1, \xi_0, \eta_1, B)P(s_4 - s_3, t_2 - t_3; \xi_3, \xi_2, \xi_4, d\eta_1). \qquad ∎$$

§5.7 样本函数的有界性

5.42定理 设 $X = \{X(z), z \in R^2_+\}$ 是可分的 * 马氏过程，其相容族为 $(\mathscr{P}^1, \mathscr{P}^2, \mathscr{P})$. $\mathscr{P}^{1t}$ (t >0) 和 $\mathscr{P}^{2s}$ ($s>0$) 是由 (8.3) (8.4) 确定的单参数转移函数族，$\mathscr{P}^{10}=\mathscr{P}^1$，$\mathscr{P}^{20}=\mathscr{P}^2$. 假定：$\forall$ 有界集 $C \in \mathscr{B}(R^2_+)$ 及 $r > 0$，有

$$\sup_{(v,s,x)\in A_{rn}} P^{1v}(s,x,C) \to 0, \quad n \to +\infty. \tag{42.1}$$

$$\sup_{(u,t,x)\in A_{rn}} P^{2u}(t,x,C) \to 0, \quad n \to +\infty. \tag{42.2}$$

其中 $A_{rn} = \{(v,s,x); 0\leqslant v,s \leqslant r, |x| > n\}$. 则对几乎一切 $\omega\in\Omega$，对任意 $z\in R^2_+ - \lambda_0$，X 在 R_z 上有界.

证 用反证法. 设存在 $r>0$，$\delta>0$，使

$$P\{X \text{ 在 } R_{(r,r)} \text{ 上无界}\} = \delta > 0.$$

设$0\leqslant s_1<\cdots<s_m<r$，$0\leqslant t_1<\cdots<t_n<r$，对 a，$d=1$，…，m，$b=1$，…，n，$k=1$，2，…，令

$$B_{ab}^k=\left\{\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{b-1}[|X(s_i,t_j)|\leqslant k]\right\}\bigcap_{i=1}^{a-1}[|X(s_i,t_b)|\leqslant k]$$
$$\cap\ [|X(s_a,t_b)|>k], \tag{42.3}$$
$$B_d^k=\bigcap_{i=1}^{d-1}[|X(s_i,r)|\leqslant k]\cap[|X(s_d,r)|>k]. \tag{42.4}$$
易知对有界集$C\in\mathscr{B}$，有
$$\begin{aligned}
&[X(r,r)\in C]\\
&=\left\{[X(r,r)\in C]\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n}[|X(s_i,t_j)|\leqslant k]\right\}\\
&\quad\cup\left\{[X(r,r)\in C]\cap\left(\bigcup_{a=1}^{m}\bigcup_{b=1}^{n}B_{ab}^k\right)\right\}\\
&\quad\subset\left\{\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n}[|X(s_i,t_j)|\leqslant k]\right\}\\
&\quad\cup\left(\left\{[X(r,r)\in C]\cap\left(\bigcup_{a=1}^{m}\bigcup_{b=1}^{n}B_{ab}^k\right)\right\}\right.\\
&\quad\left.\cap\left\{\left(\bigcup_{d=1}^{m}B_d^q\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{m}[|X(s_i,r)|\leqslant q]\right)\right\}\right)\\
&\quad\subset\left\{\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n}[|X(s_i,t_j)|\leqslant k]\right\}\\
&\quad\cup\left\{[X(r,r)\in C]\cap\left(\bigcup_{d=1}^{m}B_d^q\right)\right\}\\
&\quad\cup\left\{\left(\bigcup_{a=1}^{m}\bigcup_{b=1}^{n}B_{ab}^k\right)\right.\\
&\quad\left.\cap\left(\bigcap_{i=1}^{m}[|X(s_i,r)|\leqslant q]\right)\right\}\\
&\quad\subset\left\{\bigcap_{i=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n}[|X(s_i,t_j)|\leqslant k]\right\}\\
&\quad\cup\left\{[X(r,r)\in C]\cap\left(\bigcup_{d=1}^{m}B_d^q\right)\right\}\\
&\quad\cup\left\{\bigcup_{a=1}^{m}\bigcup_{b=1}^{n}(B_{ab}^k\cap[|X(s_a,r)|\leqslant q])\right\}.
\end{aligned} \tag{42.5}$$
分别由1马氏性和2马氏性可得
$$P\{[X(r,r)\in C]\cap B_d^q\}=\int_{B_d^q}P^{1r}(r-s_d,X(s_d,r),C)dP$$
$$\leqslant\sup_{(v,s,x)\in A_{rq}}P^{1v}(s,x,C)P(B_d^q), \tag{42.6}$$
$$P\{B_{ab}^k\cap[|X(s_a,r)|\leqslant q]\}$$

$$= \int_{B_{ab}^k} P^{2s_a}(r - t_b, X(s_a, t_b), [-q, q])dP$$

$$\leqslant \sup_{(u,t,x)\in A_{rk}} P^{2u}(t, x, [-q, q])P(B_{ab}^k). \qquad (42.7)$$

利用定理条件，取 q 充分大使得

$$\sup_{(v,s,x)\in A_{rq}} P^{1v}(s, x, C) < \frac{\delta}{4}. \qquad (42.8)$$

再取 k 充分大，使

$$\sup_{(u,t,x)\in A_{rk}} P^{2u}(t, x, [-q, q]) < \frac{\delta}{4}. \qquad (42.9)$$

令 Q 为可分集，不妨设当 $m\to\infty$，$n\to\infty$时，$\{(s_i, t_j): 1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n\} \uparrow Q\cap R_{(r,r)}$，则由（42.5）可得

$$P\{X(r,r) \in C\}$$

$$\leqslant P\{|X(z)| \leqslant q, z \in R_{(r,r)} \cap Q\} + \sum_{d=1}^{m} \frac{\delta}{4} \cdot P(B_d^q)$$

$$+ \sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{n} \frac{\delta}{4} \cdot P(B_{ab}^k) \leqslant 1 - \delta + \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} = 1 - \frac{\delta}{2}.$$

$$(42.9)$$

注意上式不依赖于 C 的选取，这与 $X(r,r)$ 几乎处处有限相矛盾．∎

§5.8 样本函数的灯函数性和阶梯性

设 $(\mathscr{P}^1, \mathscr{P}^2, \mathscr{P})$ 是相容族．由它可确定族 $\mathscr{P}^0 = \{P(y, x; y + z, B): y \in R_+^2, 0 < z \in R_+^2, x \in E, B \in \mathscr{E}\}$ 如下：设 $y = (u, v)$．如 $z = (s, t) \in R_+^2 - \lambda_0$，令

$$P((u,v), x; (u+s, v+t), B)$$

$$= \int P^{1v}(s, x, d\zeta)\int P^{2u}(t, x, d\eta)\int P(s, t; x, \eta, \zeta, B). \quad (42.10)$$

如 $z \in \lambda_0 - \{0\}$，令

$$P((u,v), x; (u, v+t), B) = P^{2u}(t, x, B), t > 0.$$

$$(42.11)$$

$$P((u,v),x;(u+s,v),B)=P^{1r}(s,x,B),s>0.$$
(42.12)

易知，$\mathscr{P}^0$ 是齐次的单点转移函数族.

设 $X=\{X(z),z\in R_+^2\}$ 是相容族$(\mathscr{P}^1,\mathscr{P}^2,\mathscr{P})$过程，则 X 是规则 * 马氏过程.

5.43引理 设 $X=\{X(z),z\in R_+^2\}$ 是相容族$(\mathscr{P}^1,\mathscr{P}^2,\mathscr{P})$过程. 则固定 $z_0\in R_+^2-\lambda_0,B\in\mathscr{E}$ 时，$\{P(z,X(z);z_0,B),z\in R_{z_0}\}$ 是$\{\mathring{\mathscr{F}}_z\}$ 鞅.

证 由 X 的规则性和单点马氏性易得

$$P(z,X(z);z_0,B)=P\{X(z_0)\in B|\mathring{\mathscr{F}}_z\}.$$

由此得证结论. ∎

5.44引理 设 $X=\{X(z),z\in R_+^2\}$ 完全可分. 则存在两个可分集 Q_1，Q_2，$Q_1\cap Q_2=\varnothing$，使对任意 $z_0\in R_+^2$，Q_1（相应地，Q_2）中最多有一个点在过 z_0 的水平（相应地，竖直）直线上.

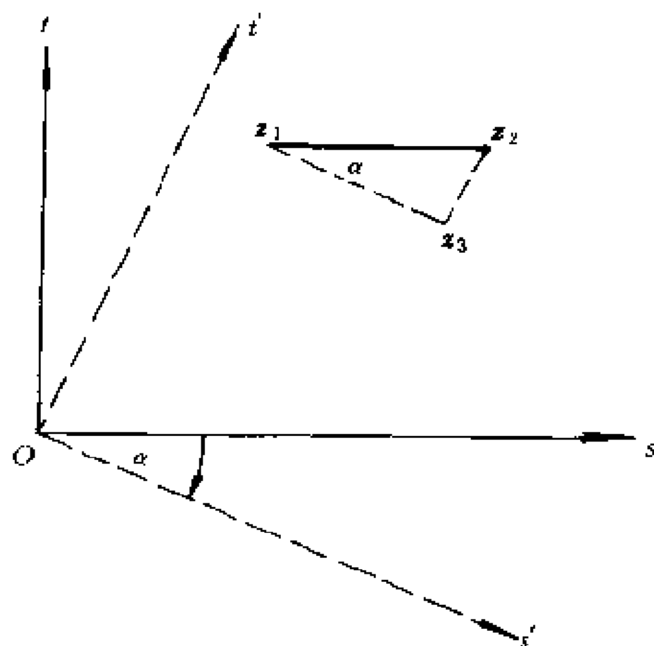


图4

证 如图4，将坐标轴旋转角 α，使 $\mathrm{tg}\alpha$ 为无理数，从而形成一个新坐标系 $s'Ot'$. 在系 $s'Ot'$ 中取点集 $A_1=\{(i2^{-n},j2^{-n}): n$ 为非负整数，i,j 为整数$\}$. 令 Q_1 为将 A_1 限制在系 sOt 的第一象限上所得的点集，往证 Q_1 满足引理要求.

用反证法，不妨设经过 $z_0\in R_+^2$（系 sOt 中）的水平线上存在 A_1 中的两个点 z_1,z_2. 由 A_1 的定义知，存在点 $z_3\in A_1$ 使 $z_1z_3\perp z_2z_3$. 而由 A_1 的取法知距离 $\rho(z_1,z_3),\rho(z_2,z_3)$ 均是有理数，故 $\rho(z_2,z_3)/\rho(z_1,z_3)$ 也是有理数，这与 $\rho(z_2,z_3)/\rho(z_1,z_3)=\mathrm{tg}\alpha$ 为无理数相矛盾.

在 $s'Ot'$ 系上取点集 $A_2=\{(i2^{-m}b,j2^{-m}b): m$ 为非负整数，i,j 为非零整数$\}$，b 是无理数. 将 A_2 限制在原坐标系 sOt 的第一象限上所得的点集为 Q_2，易知 $Q_1\cap Q_2=\varnothing$，且类似于对 Q_1 的证明，可证 Q_2 满足引理要求. ∎

5.45定理 设 X 是可分的 $(\mathscr{P}^1,\mathscr{P}^2,\mathscr{P})*$ 马氏过程. 如果存在 $0<z_n=(s_n,t_n)$，$s_n\uparrow+\infty$，$t_n\uparrow+\infty$，使对任意固定的 n，X 的几乎一切样本函数在 R_{z_n} 中有界，且存在 $B_m^n\in\mathscr{B}(R^1)$，$m=1,2,\cdots$，使

(i) 固定 m 时，$P(z,x;z_n,B_m^n)$ 关于 (z,x) 连续，$z\in R_{z_n}$，$x\in R^1$.

(ii) 任给 $z\in R_{z_n}$，$x_1,x_2\in E$，$x_1\neq x_2$，均存在 k，使 $P(z,x_1;z_n,B_k^n)\neq P(z,x_2;z_n,B_k^n)$.

则对几乎一切 $\omega\in\Omega$，对任意 $z\in R_+^2$，X 在点 z 的灯极限 $X_i(z)(1\leqslant i\leqslant 4)$ 存在，即 $X(\cdot,\omega)$ 是灯函数. 如果 X 完全可分，此时 $X(z,\omega)$ 必等于 $X_i(z,\omega)$，$i=1,2,3,4$，中之一.

证 设 n 固定。对 $B\in\mathscr{B}(R^1)$，由引理5.43知，$\{P(z,X(z);z_n,B),\mathring{\mathscr{F}}_z,z\in R_{z_n}\}$ 是鞅. 设 Q 是可分集，N_0 为例外集. 易知 $Q\cap R_{z_n}$ 是过程 $\{X(z),z\in R_{z_n}\}$ 的可分集，N_0 也是新过程的例外集. 取 $D=Q\cap R_{z_n}$，由定理2.25，注意 B_m^n，$m=1,2,\cdots$ 是可数序列，故存在零概率集 N_1，使 $\omega\notin N_1$ 时，对任意 $z_0\in R_+^2$ 及 $m=1,2,\cdots$，当

$z \in Q \cap R_{z_n} \cap Q_i(z_0)$，且 $z \to z_0$ 时，灯极限

$$\lim P(z, X(z); z_n, B_m^n). \tag{45.1}$$

对 $i=1, 2, 3, 4$ 均存在. 又依定理假设，存在零概率集 N_2，使当 $\omega \notin N_2$时，$X(z,\omega)$ 在 R_{z_n} 上有界. 往证：$\omega \notin N_0 \cup N_1 \cup N_2$ 时，对任意 $z \in R_{z_n}$，灯极限 $X_i(z,\omega)(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 均存在.

用反证法证明. 设存在 $\omega \notin N_0 \cup N_1 \cup N_2$ 及 $z_0 \in R_{z_n}$，使 $X_1(z_0,\omega)$ 不存在，则可找到点列 $z_n^i = (s_n^i, t_n^i) \in Q_1(z_0)$，$z_n^i \to z_0$，使 $a_1 = \lim\limits_{n \to \infty} X(z_n^1, \omega) \neq \lim\limits_{n \to \infty} X(z_n^2, \omega) = a_2$. 由 X 在 R_{z_n} 上的有界性知，$-\infty < a_1, a_2 < +\infty$. 利用可分性，可找到$(u_k^i, v_k^i) \in Q \cap R_{z_n} \cap Q_1(z_0)$，$(u_k^i, v_k^i) \longrightarrow z_0$，$i = 1,2$，使得 $a_1 = \lim\limits_{k \to +\infty} X[(u_k^1, v_k^1), \omega] \neq \lim\limits_{k \to +\infty} X[(u_k^2, v_k^2), \omega] = a_2$. 由条件(i) 知，对 $m = 1,2,\cdots$，有

$$\begin{aligned}&\lim_{k \to +\infty} P((u_k^1, v_k^1), X[(u_k^1, v_k^1), \omega]; z_n, B_m^n)\\ =\ & P(z_0, a_1; z_n, B_m^n),\\ &\lim_{k \to +\infty} P((u_k^2, v_k^2), X[(u_k^2, v_k^2), \omega]; z_n, B_m^n)\\ =\ & P(z_0, a_2; z_n, B_m^n),\end{aligned}$$

于是由 (45.1) 有

$$P(z_0, a_1; z_n, B_m^n) = P(z_0, a_2; z_n, B_m^n).$$

此与(ii) 矛盾. 所以，当 $\omega \notin N_0 \cup N_1 \cup N_2$ 时，对任意 $z \in R_{z_n}$，灯极限 $X_i(z,\omega)(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 均存在. 上述例外集 $N_0 \cup N_1 \cup N_2$ 是对固定 n 得到的，可记为 Λ_n，令 $\Lambda = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Lambda_n$，得 $\omega \notin \Lambda$ 时，对任意 $z \in R^2$，灯极限 $X_i(z,\omega)(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 存在。

设 X 完全可分. 取引理 5.44 中的两个互不相交的可分集 Q_1，Q_2，注意到 X 的几乎一切样本函数，四个极限 $X_i(z,\omega)(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 存在，再由引理 5.44 及可分性不难证明：对几乎一切 $\omega \in \Omega$，对任意 $z \in R_+^2$，$X(z,\omega)$ 必等于 $X_i(z,\omega)(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 之一. ∎

5.46定义 称函数 $X = \{X(z), z \in R_+^2\}$ 在 $R_{(a,b)}$ 上是逐块常值的，如果存在有穷分割 $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_r = a$，$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_q = b$，并记 $z_{ij} = (s_i, t_j)$；又存在常数 $c_{ij}(0 \leqslant i \leqslant r-1, 0 \leqslant$

$j \leqslant q-1$)，使对任意 $z \in (z_{ij}, z_{i+1,j+1})$，有 $X(z)=C_{ij}$. 如果每个 $X(z_{ij})$ 还等于诸灯极限 $X_k(z_{ij})(1 \leqslant k \leqslant 4)$ 之一，称 X 在 $R_{(a,b)}$ 上阶梯的. 如果存在 $a_n \uparrow +\infty, b_n \uparrow +\infty$，使对每个 n，X 在 $R_{(a_n,b_n)}$ 上是逐块常值的或阶梯的，称 X 是逐块常值的或阶梯的.

5.47定理 设 $X=\{X(z), z \in R_+^2\}$ 是($\mathscr{P}^1, \mathscr{P}^2, \mathscr{P}$) * 马氏过程，设 E 可列. 如果存在 $z_n=(s_n,t_n)$，$s_n \uparrow +\infty$，$t_n \uparrow +\infty$，使对任意固定的 n，X 的几乎一切样本函数在 R_{z_n} 中有界，而且满足.

(i) 当 i，j 固定时，$P(z,i;z_n,j)$ 关于 $z \in R_{z_n}$ 连续.

(ii) 任给 $z \in R_{z_n}$，$i_1 \neq i_2$，均存在 $j \in E$，使

$$P(z,i_1;z_n,j) \neq P(z,i_2;z_n,j),$$

则对几乎一切 $\omega \in \Omega$，X 在 R_+^2上为逐块常值的. 如果 X 还是完全可分的，则 X 必是阶梯的.

证明时需注意 E 有离散拓扑，略.

§5.9 样本函数的连续性

对过程 X，$z_0=(s_0,t_0) \in R_+^2$，$h>0$，令

$$P_{t_0}^1(h)=\sup_{0 \leqslant s,s+h<1} P(|X(s+h,t_0)-X(s,t_0)|>\varepsilon),$$

$$P_{s_0}^2(h)=\sup_{0 \leqslant t,t+h<1} P(|X(s_0,t+h)-X(s_0,t)|>\varepsilon).$$

5.48定理 设 $X=\{X(z), z \in R_{(1,1)}\}$ 是 ($\mathscr{P}^1$, $\mathscr{P}^2$, $\mathscr{P}$) * 马氏过程，X 完全可分，几乎一切样本函数是灯函数. 如果对任意 $\varepsilon>0$，及 $z_0=(s_0,t_0) \in R_{(1,1)}$，有 $P_{s_0}^2(h)=o(h)$，$P_{t_0}^1(h)=o(h)$，$h \to 0$，则 X 的几乎一切样本函数连续.

证 对任意 $z_0 \in R_{(1,1)}$，因 $nP_{t_0}^1\left(\dfrac{1}{n}\right)=o(1)$，$nP_{s_0}^2\left(\dfrac{1}{n}\right)=o(1)$，$n \to \infty$，故可取子列 $\{n^2(s_0)\}$，$\{n^1(t_0)\}$，使

$$\sum n^1(t_0)P_{t_0}^1\left(\frac{1}{n^1(t_0)}\right)<+\infty,$$

$$\sum n^2(s_0)P_{s_0}^2\left(\frac{1}{n^2(s_0)}\right)<+\infty, \tag{48.1}$$

记

$$A_n^1\left(\frac{i}{2^m},\varepsilon\right)=\bigcup_{k=1}^{n}\left\{\left|X\left(\frac{k}{n},\frac{i}{2^m}\right)-X\left(\frac{k-1}{n},\frac{i}{2^m}\right)\right|>\varepsilon\right\},$$

$$A_n^2\left(\frac{j}{2^m},\varepsilon\right)=\bigcup_{k=1}^{n}\left\{\left|X\left(\frac{j}{2^m},\frac{k}{n}\right)-X\left(\frac{j}{2^m},\frac{k-1}{n}\right)\right|>\varepsilon\right\}.$$

其中 m，n 为整数，i，$j=0$，…，2^m-1，则

$$P\left\{A^1_{n^1(i2^{-m})}\left(\frac{i}{2^m},\varepsilon\right)\right\}$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n^1(i2^{-m})}P\left\{\left|X\left(\frac{k}{n^1(i2^{-m})},\frac{i}{2^m}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-X\left(\frac{k-1}{n^1(i2^{-m})},\frac{i}{2^m}\right)\right|>\varepsilon\right\}$$

$$\leqslant n^1(i2^{-m})P^1_{i2^{-m}}\left(\frac{1}{n^1(i2^{-m})}\right).$$

同理，

$$P\left\{A^2_{n^2(j2^{-m})}\left(\frac{j}{2^m},\varepsilon\right)\right\}\leqslant n^2(j2^{-m})P^2_{j2^{-m}}\left(\frac{1}{n^2(j2^{-m})}\right).$$

其中 m 为正整数，i，$j=1$，…，2^m-1. 利用（48.1），由 Borel-Cantalli 引理得

$$P\left\{\varlimsup_{n^1(i2^{-m})\to+\infty}A^1_{n^1(i2^{-m})}\left(\frac{i}{2^m},\varepsilon\right)\right\}=0,$$

$$P\left\{\varlimsup_{n^2(j2^{-m})\to+\infty}A^2_{n^2(j2^{-m})}\left(\frac{j}{2^m},\varepsilon\right)\right\}=0.$$

记 $\Omega_0^1(m,i,\varepsilon)$，$\Omega_0^2(m,i,\varepsilon)$ 分别为上面两个零概率集的补集，并记

$$\Omega_0^a(\varepsilon)=\bigcap_{m,i}\Omega_0^a(m,i,\varepsilon),a=1,2,$$

$$\Omega_0(\varepsilon)=\Omega_0^1(\varepsilon)\cap\Omega_0^2(\varepsilon),\Omega_0=\bigcap_k\Omega_0\left(\frac{1}{k}\right).$$

易知 $P(\Omega_0)=1$. 取引理 5.44 中的可分集 Q_1，Q_2，设相应的例外集为 N_1，N_2. 往证：当 $\omega\in\Omega_0\cap N_1^c\cap N_2^c\cap B$ 时，$X(\omega)$ 在 $R_{(1,1)}$ 上连续，其中，$B=\{\omega:\forall\ z\in R_{(1,1)}$，灯极限 $X_i(z,\omega)(1\leqslant i\leqslant 4)$ 均存在$\}$.

先证：当 $z_0\in\{(s,t):(0,0)<(s,t)<(1,1)\}$ 时，诸 $X_i(z_0,\omega)(1\leqslant i\leqslant 4)$ 相等.

由 Ω_0的定义，可找到 $i(r)$，$m(r)$，$k_1(r)$，$k_2(r)$，$\eta(r)$，使

$$0 < i(r)2^{-m(r)} - t_0 < \frac{1}{r},$$

$$0 < s - \frac{k_1(r)}{n(r)} < \frac{k_2(r) - k_1(r)}{n} < \frac{1}{r},$$

$$\left| X\left[\left(\frac{k_1(r)}{n(r)}, i(r)2^{-m(r)}\right), \omega\right] - X\left[\left(\frac{k_2(r)}{n(r)}, i(r)2^{-m(r)}\right), \omega\right] \right| \leqslant \frac{1}{r},$$

$$r = 1, 2, \cdots$$

这样，我们找到了两个点列 $\{(s_n^1, t_n)\}, \{(s_n^2, t_n)\}$，使 $s_n^1 \to s_0 -, s_n^2 \to s_0 +, t_n \to t_0 +$，且有

$$|X[(s_n^1, t_n), \omega] - X[(s_n^2, t_n), \omega]| \to 0, \ n \to \infty.$$

所以 $X_1(z_0, \omega) = X_2(z_0, \omega)$. 同理证诸 $X_i(z_0, \omega)(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 相等，记其共同的值为 α.

因 $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$，$z_0$不能同时属于 Q_1和 Q_2. 由引理5.44及可分性知 $X(z_0, w) = \alpha$. 又对任 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使当 $0 < |s - s_0| < \delta, 0 < |t - t_0| < \delta$ 时，对 $z = (s, t)$，

$$|X(z, \omega) - X(z_0, \omega)| < \varepsilon.$$

而当 $z \in \{(s, t_0) : s_0 - \delta < s < s_0 + \delta\} \cup \{(s_0, t) : t_0 - \delta < t < t_0 + \delta\}$ 时，因 z 不同时属于 Q_1 和 Q_2，再由引理 5.44 及可分性知，$|X(z, \omega) - X(z_0, \omega)| \leqslant \varepsilon$. 所以 X 在点 z_0 连续.

对于其它的点 $z_0 \in R_{(1,1)}$，证明类似. ∎

对于 * 马氏过程，定理5.48中的条件可以加在转移函数族上. 为此，我们给出标准 * 马氏过程的定义.

设给定相容的转移函数族 $(\mathscr{P}^1, \mathscr{P}^2, \mathscr{P})$. $\mathscr{P}^{1t}$，$\mathscr{P}^{2s}$ 按 (8.3) (8.4) 确定，并且 $\mathscr{P}^{10} \equiv \mathscr{P}^1, \mathscr{P}^{20} \equiv \mathscr{P}^2$. 设 $z = (s, t) \geqslant 0$，$x \in E$. 设 $s = s_0 < \cdots < s_r$，$t = t_0 < \cdots < t_q$，$z_{ij} = (s_i, t_j)$，$(i, j) \in M_{rq}$. 按 (8.1) 确定测度 $\nu = \nu_z$，但其中的 P^1，P^2用 P^{1t}，P^{2s}代替. 函数 G 仍按 (7.3) 确定. 设 P_0是集中在点 x 的概率测度 δ_x. 按 (8.1) 右方确定的值与 z，x 有关，且由 $(\mathscr{P}^1, \mathscr{P}^2, \mathscr{P})$ 唯一确定，记为 $F_z(z_{ij}, B_{ij}, (i, j) \in M_{rq})$.

5.49定义 设 X 是 $(\mathscr{P}^1, \mathscr{P}^2, \mathscr{P})$ * 马氏过程. 对 $z = (s, t) \geqslant$

$0, x \in E$,对形如

$$A = (X(z_{ij}) \in B_{ij}, (i,j) \in M_{rq})$$

的集合，定义集函数 $P_{z,x}(A)$ 的值为 $F_z(z_{ij}, B_{ij}, (i,j) \in M_{rq})$. 假定集函数 $P_{z,x}$ 可唯一地拓展成 σ 域 $\mathring{\mathscr{F}}(R_z^{**}) = \sigma\{X(y), y \geqslant z\}$ 上的概率测度 $P_{z,x}(A), A \in \mathring{\mathscr{F}}(R_z^{**})$. 我们便称 X 为标准 $*$ 马氏过程.

由定理 5.12,当 $(E,\mathscr{E})$ 是 σ 紧距离可测空间时,或 T_+^2 可数时 $(E,\mathscr{E})$ 是任意可测空间时,标准的 $(\mathscr{P}^1,\mathscr{P}^2,\mathscr{P})$ $*$ 马氏过程总是存在的.

5.50推论 设 $X = \{X(z), z \in R_+^2\}$ 是完全可分的标准 $*$ 马氏过程,有 $*$ 转移函数族 $(\mathscr{P}^1,\mathscr{P}^2,\mathscr{P})$. 假定 X 的几乎一切样本函数都是灯函数. 假定对任意 $M > 0, \varepsilon > 0, 0 \leqslant (s_0,t_0) \leqslant (M, M)$,均有

$$\sup_{0\leqslant s<M} P^{1t_0}(s,x;(x-\varepsilon,x+\varepsilon)^c) = o(h), h \to 0, \quad (50.1)$$

$$\sup_{0\leqslant t<M} P^{2s_0}(t,x;(x-\varepsilon,x+\varepsilon)^c) = o(h), h \to 0, \quad (50.2)$$

则 X 的几乎一切样本函数连续.

证 略. ∎

§ 5.10 样本函数在固定点的连续性

对 $(\mathscr{P}^1,\mathscr{P}^2,\mathscr{P})$ 标准 $*$ 马氏过程，先叙述几个条件.

5.51条件 对 $x \in R^1$,记 $U(x,\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, $V(x,\varepsilon) = R^1 - U(x,\varepsilon)$,满足:

(i) $\forall\, \varepsilon > 0, x \in R^1$

$$P^{1v}(s,x,V(x,\varepsilon)) \to 0, \qquad s \to 0+, \quad (51.1)$$

$$P^{2u}(t,x,V(x,\varepsilon)) \to 0, \qquad t \to 0+, \quad (51.2)$$

(ii) 固定 u,v,s,t 及 $\varepsilon > 0$, $P^{1v}(s,x,U(y,\varepsilon))$ 和 $P^{2u}(t,x,U(y,\varepsilon))$ 均关于 (x,y) 可测.

(iii) 任给 $(s,t)\in R_+^2-\lambda_0$, $B\in\mathscr{B}(R^1)$, $P^{1v}(s,x,B)$ 关于 (x,v) 连续, $P^{2u}(t,x,B)$ 关于 (x,u) 连续.

(iv) 任给 $\varepsilon>0$, 有界集 $B\in\mathscr{B}(R^1)$, $(u,v)\in R_+^2$, 当 $s\to 0+$ 时, $P^{1v}(s,x,U(x,\varepsilon))$ 关于 $x\in B$ 一致地趋于零; 当 $t\to 0+$ 时, $P^{2u}(t,x,U(x,\varepsilon))$ 关于 $x\in B$ 一致地趋于零.

5.52定理 设 X 是完全可分的、$(\mathscr{P}^1,\mathscr{P}^2,\mathscr{P})$ 标准 * 马氏过程. 条件 5.51(i)(ii)(iii) 成立. 设 $z_0\in R_+^2$ 为固定点. 如对几乎一切 ω, X 在点 z_0 的灯极限 $X_i(z,\omega)$, $(1\leqslant i\leqslant 4)$ 均存在. 则 X 在 z_0 点 $a.s.$ 连续.

证 证当 $z_0=(s_0,t_0)\in R_+^2-\lambda_0$ 时, 诸极限 $X_i(z_0)$ 相等 $a.s.$. 先证 $X_1(z_0)=X_2(z_0)$, $a.s.$.

用反证法. 设存在 $\varepsilon>0$, $\delta>0$, 使

$$P\{|X_1(z_0)-X_2(z_0)|>5\varepsilon\}>3\delta. \tag{52.1}$$

由 X_i 的定义知, 存在 $\eta>0$ 及集合 $\Delta\in\mathscr{F}$, $P(\Delta)<\delta$, 使当 $\omega\notin\Delta$ 时, 对任意满足 $-\eta<s-s_0<0$, $0<t-t_0<\eta$, $0<s'-s_0<\eta$, $0<t'-t_0<\eta$ 的 $z=(s,t)$ 和 $z'=(s',t')$, 均有 $|X(z,\omega)-X_1(z_0,\omega)|<\varepsilon$, $|X(z',\omega)-X_2(z_0,\omega)|<\varepsilon$. 由

$$\begin{aligned}&(|X_1(z_0)-X_2(z_0)|>5\varepsilon)\cap(|X(z)-X(z_0)|<\varepsilon)\\&\cap(|X(z')-X_2(z_0)|<\varepsilon)\subset(|X(z')-X(z)|>3\varepsilon)\end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}&P\{|X(z')-X(z)|>3\varepsilon\}\\&\quad\geqslant P\{|X_1(z_0)-X_2(z_0)|>5\varepsilon\}\\&\quad-P\{(|X(z)-X_1(z_0)|\geqslant\varepsilon)\\&\quad\cup(|X(z')-X_2(z_0)|\geqslant\varepsilon)\}\geqslant 3\delta-\delta=2\delta.\end{aligned}$$

取 $t=t'$, 由过程的标准性, 有

$$\begin{aligned}1-2\delta&>P\{|X[(s',t)]-X(z)|\leqslant 3\varepsilon\}\\&\geqslant\int_{\Delta^c}P^{1t}(s'-s,X(z),U(X(z),3\varepsilon))dP\\&\geqslant\int_{\Delta^c}P^{1t}(s'-s,X(z),U(X_2(z_0),2\varepsilon))dP\end{aligned}$$

$$> \int_\Omega P^{u}(s'-s, X(z), U(X_2(z_0), 2\varepsilon))dP - \delta,$$

故由上式得：当 Δs 不依赖于 z, z_0，并且 $0 < \Delta s < \eta$ 时，有

$$1 - \delta > \int_\Omega P^{u}(\Delta s, X(z), U(X_2(z_0), 2\varepsilon))dP. \qquad (52.2)$$

固定 $0 < \Delta s < \eta$，令 $t \to t_0 +$，$s \to s_0 -$，则由上式及 Fatou 引理，以及条件 5.51(ii)(iii) 得

$$1 - \delta \geqslant \varliminf_{\substack{s\to s_0- \\ t\to t_0+}} \int_\Omega P^{u}(\Delta s, X(z), U(X_2(z_0), 2\varepsilon))dP$$

$$\geqslant \int_\Omega \varliminf_{\substack{s\to s_0- \\ t\to t_0+}} P^{u}(\Delta s, X(z), U(X_2(z_0), 2\varepsilon))dP$$

$$= \int_\Omega P^{1t_0}(\Delta s, X_2(z_0), U(X_2(z_0), 2\varepsilon))dP. \qquad (52.3)$$

注意上式不依赖于 Δs 的选取．令 $\Delta s \to 0+$，则上式与条件5.51(i) 相矛盾．所以 $X_1(z_0) = X_2(z_0)$，$a.s.$ 同理可证诸 $X_i(z_0)$ $a.s.$ 相等．

运用定理5.48的证明中的方法，利用引理5.44和可分性，可证 X 在 $z_0 \in R_+^2 - \lambda_0$ 是 $a.s.$ 连续的．

当 $z_0 \in \lambda_0 - \{(0,0)\}$ 时，可类似证明 X 在 z_0 点 $a.s.$ 连续．

当 $z_0 = (0,0)$ 时，利用引理5.44和可分性，可直接地得 X 在 $(0, 0)$ 点 $a.s.$ 连续． ∎

5.53定理 将定理5.52中的条件5.51 (i) (ii) (iii) 改为条件5.51 (iv)，定理结论仍成立．

证 先证当 $z_0 \in R_+^2 - \lambda_0$ 时，诸 $X_i(z_0)$，$a.s.$ 相等．用反证法，类似于定理 5.52 的证明，不妨设存在 $\delta > 0$，$\varepsilon > 0$ 及 $\eta > 0$ 使当 $-\eta < s - s_0 < 0$，$0 < t - t_0 < \eta$，$0 < t' - t_0 < \eta$，$0 < s' - s_0 < \eta$ 时．

$$P\{|X(z) - X(z')| \geqslant 3\varepsilon\} < 3\delta. \qquad (53.1)$$

由于诸 $X_i(z_0)$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 均 $a.s.$ 存在，就可以找到足够大的有界集 $B \in \mathscr{B}(R^1)$ 及足够小的正数 $\eta_1 < \eta$，使当 $-\eta_1 < s - s_0 < 0$，

$0 < t - t_0 < \eta_1$ 时有 $P\{X(z) \in B\} > 1 - \delta$. 由条件(iv),存在 u, v, s^*,使得当 $t_0 < v < t_0 + \eta_1$, $s_0 - \eta_1 < u < s_0 < u + s^* < s_0 + \eta_1$ 时,有

$$P^{\cdot v}(u, x, U(x, 3\varepsilon)) > 1 - \delta, \qquad x \in B.$$

再由标准性得

$$\begin{aligned} &P\{|X(u,v) - X(u + s^*, v)| < 3\varepsilon\} \\ &= \int_\Omega P^{1v}(s^*, X(u,v), U(X(u,v), 3\varepsilon))dP \\ &\geqslant \int_{\{X(u,v) \in B\}} P^{1v}(s^*, X(u,v), U(X(u,v), 3\varepsilon))dP \\ &\geqslant (1 - \delta)^2 > 1 - 2\delta. \end{aligned}$$

这与 (53.1) 相矛盾,故 $X_1(z_0) = X_2(z_0)$, $a.s.$. 剩下的证明同定理5.52. ∎

§5.11 在马氏过程上生长马氏过程

一般来说,两参数马氏过程的两个参数,在概率地位上是不平等的. 例3.29是两个参数的地位不平等的一个简单的例子. 两个参数的概率地位平等的最典型的例子是 Brown 单和 Poisson 单. 在研究两参数马氏过程时,很需要比例3.29更复杂、更典型的,两个参数的概率地位不平等的过程. 本节构造了一种此类型的过程,其构造思路是在单参数马氏过程上生长单参数马氏过程. 该构造方法是很有意义的.

本节中,Z_+ 仍是非负整数集,R_+ 仍是非负实数集,$S_+ = Z_+$ 或 R_+,$T_+ = Z_+$ 或 R_+,$T = S_+ \times T_+$,这样,T 可以有四种形式. $(E, \mathscr{E})$ 是单点集可测的可测空间. $\delta(y)$ 表示 E 上的概率测度,它集中于单点 $y \in E$.

5.54定义 设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是概率空间,在其上定义了一族齐次的单参数马氏过程 $Y = \{Y(t), t \in T_+\}$, $U_t^y = \{U_t^y(s), s \in S_+\}$, $t \in T_+$, $y \in E$. 它们的状态空间都是$(E, \mathscr{E})$. 假定它们是相互独立

的，且对$(t,y) \in T_+ \times E$，过程U_t^y有相同的齐次转移函数族$\overline{P} = \{\overline{P}(s,z,B): s \in S_+, z \in E, B \in \mathscr{E}\}$，有初始分布$\delta(y)$，即：

$$P\{U_t^y(0) = y\} = 1. \tag{54.1}$$

如果

$$X(s,t) = U_t^{Y(t)}(s), (s,t) \in T, \tag{54.2}$$

称两参数过程$X = \{X(s,t),(s,t) \in T\}$为$MM$类过程. 进一步，如果$Y$的初始分布为$\hat{q}$，齐次转移函数族为$\hat{P} = \{\hat{P}(t,y,B): t \in T_+, y \in E, B \in \mathscr{B}\}$，$X$又称为$(\hat{q},\hat{P},\overline{P}) - MM$类过程.

直观上，MM类过程是在单参数马氏过程上生长单参数马氏过程而得到的两参数过程. 第一个字母M表示“根”马氏过程$Y = \{Y(t), t \in T_+\}$，它整个地放置在t轴$\{(0,t): t \in T_+\}$上，确切地说，是将随机变量$Y(t)$放置在点$(0,t)$上. 第二个字母M表示在“根”Y上生长的“树林”马氏过程，在$(0,t)$点处生长出从$Y(t)$出发的马氏过程，它放置在水平直线$\{(s,t): s \in S_+\}$上. 确切地说，是将随机变量$U_t^{Y(t)}(s)$放置在点(s,t)上.

5.55定理 设$(E,\mathscr{E})$是σ紧的距离可测空间，或者当$T = Z_+ \times Z_+$时，$(E,\mathscr{E})$是任意可测空间. 给定$(E,\mathscr{E})$上的概率测度$\hat{q} = \{\hat{q}(B), B \in \mathscr{E}\}$，以及两个齐次的单参数转移函数族$\hat{P} = \{\hat{P}(t, y,B): t \in T_+, y \in E, B \in \mathscr{E}\}$和$\overline{P} = \{\overline{P}(s,y,B): s \in S_+, y \in E, B \in \mathscr{E}\}$. 则存在概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，及定义在其上的$(\hat{q},\hat{P},\overline{P}) - MM$类过程$X = \{X(s,t),(s,t) \in T\}$.

证 由王梓坤[1, §4.2，定理2及注2]，根据$\hat{q}$和$\hat{P}$，存在概率空间$(\Omega_1,\mathscr{F}_1,P_1)$及定义在其上的齐次马氏过程$Y = \{Y(t), t \in T_+\}$，它以$\hat{q}$为初始分布，以$\hat{P}$为转移函数族. 对$y \in E$，根据$\delta(y)$和$\overline{P}$，存在概率空间$(\Omega_y,\mathscr{F}_y,P_y)$及定义在其上的齐次马氏过程$U^y = \{U^y(s), s \in S_+\}$，它以$\delta(y)$为初始分布，以$\overline{P}$为转移函数族.

利用作独立乘积空间的技巧(王梓坤[1, §1.1，引理2]，令$(\Omega_{ty},\mathscr{F}_{ty},P_{ty}) = (\Omega_y,\mathscr{F}_y,P_y)$, $(\Omega,\mathscr{F},P) = (\Omega_1,\mathscr{F}_1,P_1) \times$

$\prod\limits_{(t,y)\in T_+\times E}(\Omega_{ty},\mathscr{F}_{ty},P_{ty})$，可以在$(\Omega,\mathscr{F},P)$上定义相互独立的随机过程$Y$和$U_t^y,t\in T_+$，并且$Y$保持原来的有限维联合分布，$U_t^y$与$U^y$的有限维联合分布相同. 按(54.2)定义$X(s,t)$，则$X=\{X(s,t),(s,t)\in T\}$就是$(\hat{q},\hat{P},\overline{P})-MM$类过程. ∎

下面我们需要应用定理1.39. 如果把定理1.39中的$\mathscr{A}_1,\mathscr{G},\mathscr{A}_2$分别地理解为"过去"、"现在"和"将来"，$\mathscr{A}_1\vee\mathscr{G}$和$\mathscr{A}_2\vee\mathscr{G}$分别地理解为"过去加现在"和"现在加将来". 则定理1.39的直观意义为：如果"过去"与"现在加将来"独立，则在"现在"的条件下，"过去"与"将来"独立.

按照这个直观的理解，以及MM类过程的构造，下面的两个引理是很直观的，也是很显然的.

5.56引理 设$t_0\in T_+$固定. 记

$$\mathscr{G}=\sigma\{Y(t):t\leqslant t_0\},$$
$$\mathscr{A}_1=\sigma\{U_t^y(s):s\in S_+,t<t_0,y\in E\},$$
$$\mathscr{A}_2=\sigma\{U_{t_0}^{Y(t_0)}(s):s\in S_+\},$$

则

$$P(A_2|\mathscr{A}_1\vee\mathscr{G})=P(A_2|\mathscr{G}),A_2\in\mathscr{A}_2,\tag{56.1}$$

或等价地

$$(\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2|\mathscr{G}).\tag{56.2}$$

5.57引理 设$H=\{t_1,\cdots,t_n\}\subset T_+$. 记

$$\mathscr{G}=\sigma\{Y(t):t\in H\},$$
$$\mathscr{A}_1=\sigma\{U_t^y(s):s\in S_+,t\notin H,y\in E\},$$
$$\mathscr{A}_2=\sigma\{U_t^{Y(t)}(s):s\in S_+,t\in H\}.$$

则(56.1)(56.2)成立.

设$t_0\in T_+$，记$\Gamma_1=\{(0,l):l\in T_+,l<t_0\}$，$\Gamma_2=\{(s,t_0):s\in S_+\}$，$\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$. 依照$MM$类过程的构造，容易看出，$X$在折线$\Gamma$上是单参数马氏过程. 确切地说，令

$$L_1=\{l:(0,l)\in\Gamma_1\},L_2=\{t_0+s:s\in S_+\},$$
$$L=L_1\cup L_2.$$

$$C(l)=\begin{cases}Y(l), & \text{如 } l\in L_1;\\ X(s,t_0), & \text{如 } l=t_0+s\in L_2.\end{cases}$$

则有下面的

5.58引理 $C=\{C(l),l\in L\}$ 是单参数马氏过程. C 未必是齐次的，但 $C_1=\{C(l),l\in L_1\}$ 和 $C_2=\{C(l),l\in L_2\}$ 却是齐次的，分别有齐次转移函数族 $\hat{P}$ 和 $\overline{P}$.

引理5.58还可以加强. 记增加的 σ 域族 $\{\mathscr{A}_l, l\in L\}$ 为

$$\mathscr{A}_l=\begin{cases}\sigma\{Y(t),U_t^y(s):s\in S_+,t\leqslant l,y\in E\}, & \text{如 } l\in L_1.\\ \mathscr{A}_{t_0-}\vee\sigma\{X(a,t_0):a\leqslant s\}, & \text{如 } l=t_0+s\in L_2.\end{cases} \tag{58.1}$$

其中

$$\mathscr{A}_{t_0-}=\sigma\{Y(t),U_t^y(s):s\in S_+,t<t_0,y\in E\}. \tag{58.2}$$

5.59引理 过程 $C=\{C(l),l\in L\}$ 关于 $\{\mathscr{A}_l,l\in L\}$ 是马氏过程.

证 要证：对 l, $m\in L$, $l\leqslant m$, $B\in\mathscr{E}$, 有

$$P\{C(m)\in B|\mathscr{A}_l\}=P\{C(m)\in B|C(l)\}. \tag{59.1}$$

视 l 为固定，并令

$$\overline{\mathscr{G}}=\sigma\{C(u):u\leqslant l\},\overline{\mathscr{A}}_2=\sigma\{C(u):u\geqslant l\};$$

$$\overline{\mathscr{A}}_1=\begin{cases}\sigma\{U_t^y(s):s\in S_+,t\leqslant l,y\in E\}, & \text{如 } l\in L_1.\\ \sigma\{U_t^y(s):s\in S_+,t<t_0,y\in E\}, & \text{如 } l\in L_2.\end{cases}$$

注意，$\mathscr{A}_l=\overline{\mathscr{G}}\vee\overline{\mathscr{A}}_1$. 由 MM 类过程的构造，$\overline{\mathscr{A}}_1$与 $\overline{\mathscr{G}}\vee\overline{\mathscr{A}}_2$独立. 依定理1.39和引理5.58，有 $(\overline{\mathscr{A}}_1,\overline{\mathscr{A}}_2|\overline{\mathscr{G}})$，从而得证(59.1).

∎

根据 MM 类过程的构造，引理5.59还可以推广.

5.60引理 设 $t_0\in T_+$. 令

$$\mathscr{A}(t_0-)=\sigma\{Y(s),U_t^y(s):s\in S_+,t\neq t_0,y\in E\}, \tag{60.1}$$

$$\mathscr{A}(t_0+s)=\mathscr{A}(t_0-)\vee\sigma\{X(a,t_0):a\leqslant s\}, \tag{60.2}$$

则 $C_2=\{C(l),l\in L_2\}$ 关于 $\{\mathscr{A}(l),l\in L_2\}$ 是齐次马氏过程，转移

函数族是 $\bar{P}$.

证　仿引理5.59证明. ∎

5.61引理　设 $H=\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}\subset T_+$. 令

$$\mathscr{A}(H-)=\sigma\{Y(t),U_t^y(s):s\in S_+,t\notin H,y\in E\},\tag{61.1}$$

$$\mathscr{A}(H,s)=\mathscr{A}(H-)\vee\sigma\{X(a,t_1),\cdots,X(a,t_n),a\leqslant s\},\tag{61.2}$$

则对 $A\in\sigma\{X(a,t_1),\cdots,X(a,t_n):a\geqslant s\}$, 有

$$\begin{aligned}P\{A|\mathscr{A}(H,s)\}&=P\{A|X(a,t_1),\cdots,X(a,t_n),a\leqslant s\}\\&=P\{A|X(s,t_1),\cdots,X(s,t_n)\}.\end{aligned}\tag{61.3}$$

证　仿引理5.59的证明可得（61.3）第一等号. 为证第二等号,只需说明单参数过程 $\{R(s),s\in S_+\}$ 是取值于 $(E^n,\mathscr{E}^n)$ 的马氏过程. 这里 $R(s)=(X(s,t_1),\cdots,X(s,t_n))$, $(E^n,\mathscr{E}^n)$ 是 $(E,\mathscr{E})$ 的 n 次自乘.

事实上，因诸 U_t^y, $(t, y)\in T_+\times E$ 是独立的马氏过程，转移函数为 $\bar{P}$, 故如对任 $z_1,\cdots,z_n\in E$, 记 $R(s;z_1,\cdots,z_n)=(U_{t_1}^{z_1}(s),\cdots,U_{t_n}^{z_n}(s))$, 则 $\{R(s,z_1,\cdots,z_n),s\in S_+\}$ 是取值于 $(E^n,\mathscr{E}^n)$ 的马氏过程,转移函数为 $P(s,(y_1,\cdots,y_n),B_1\times\cdots\times B_n)=\prod_{i=1}^n\bar{P}(s,y_i,B_i)$, $s\in S_+$, $(y_1,\cdots,y_n)\in E^n$, $B_1\times\cdots\times B_n\in\mathscr{E}^n$. 于是 $\{R(s)\equiv R(s,Y(t_1),\cdots,Y(t_n)),s\in S_+\}$ 也是取值于 $(E^n,\mathscr{E}^n)$ 的马氏过程，初始分布为 $(Y(t_1),\cdots,Y(t_n))$ 的分布,转移函数为 $P(s,(y_1,\cdots,y_n),B_1\times\cdots\times B_n)$. ∎

5.62引理　设 $(s,t),(u,v)\in T$, $B\in\mathscr{E}$. 则

$$\begin{aligned}&P\{X(s+u,t+v)\in B|\mathring{\mathscr{F}}_{st}\}\\&=P\{X(s+u,t+v)\in B|Y(t)\}.\end{aligned}\tag{62.1}$$

其中

$$\mathring{\mathscr{F}}_{st}=\sigma\{X(a,b),(a,b)\leqslant(s,t)\}\tag{62.2}$$

证　令 $t_0=t+v$，采用记号（65.1），则 $\mathring{\mathscr{F}}_u \subset \mathscr{A}_t \subset \mathscr{A}_{t_0}$. 利用条件概率的性质及引理5.59，（62.1）左方等于

$$E\{P[C(t_0+s+u)\in B|\mathscr{A}_{t_0}]|\mathring{\mathscr{F}}_u\}$$

$$=E\{P[C(t_0+s-u)\in B|C(t_0)]|\mathring{\mathscr{F}}_u\}$$

$$=E\{\overline{P}(s+u,C(t_0),B)|\mathring{\mathscr{F}}_u\}$$

$$=E\{E[\overline{P}(s+u,C(t_0),B)|\mathscr{A}_t]|\mathring{\mathscr{F}}_u\}$$

$$=E\{E[\overline{P}(s+u,C(t_0),B|C(t)]|\mathring{\mathscr{F}}_u\}.$$

由于 $C(t)=X(0,t)$ 是 $\mathring{\mathscr{F}}_u$ 可测的，故上式右方等于

$$E[\overline{P}(s+u,C(t_0),B)|C(t)\}$$

$$=\int_E \hat{P}(v,C(t),dz)\overline{P}(s+u,z,B),$$

而（62.1）右方等于

$$P\{U_{t_0}^{Y(t_0)}(s+u)\in B|Y(t)\}$$

$$=\int_E \hat{P}(v,Y(t),dz)P(U_{t_0}^z(s+u)\in B).$$

注意 $C(t)=Y(t)$，$P(U_{t_0}^z(s+u)\in B)=\overline{P}(s+u,z,B)$，故(62.1)成立. ∎

5.63引理　设 $(s,t),(u,v)\in T$，$B\in\mathscr{E}$. 则

$$P\{X(s+u,t+v)\in B|X(s,t),$$
$$X(s,t+v),X(s+u,t)\}$$
$$=P\{X(s+u,t+v)\in B|X(s,t+v)\}$$
$$=\overline{P}(u,X(s,t+v),B). \tag{63.1}$$

证　只需证第一个等号. 令 $t_0=t+v$，$\mathscr{C}=\sigma\{X(s,t),X(s,t_0),X(s-u,t)\}$. 则 $\mathscr{C}\subset\mathscr{A}_{t_0+s}$，由引理 5.59，(63.1) 左方等于

$$E\{P[C(t_0+s+u)\in B|\mathscr{A}_{t_0+s}]|\mathscr{C}\}$$

$$=E\{P[C(t_0+s+u)\in B|C(t_0+s)]|\mathscr{C}\}. \tag{63.2}$$

因为 $C(t_0+s)=X(s,t_0)$ 是 $\mathscr{C}$ 可测的，上式等于

$$P[C(t_0+s+u)\in B|C(t_0+s)]$$
$$=P\{X(s+u,t_0)\in B|X(s,t_0)\}.$$

再依引理5.58，上式左方等于（63.1）右方. ∎

下面研究 MM 类过程的马氏性.

5.64定理 MM 类过程 X 具有宽过去马氏性，具有齐次三点转移函数族，其相应的三点转移函数是：对 $(s,t)\in T, 0<(u,v)\in T, a,b,c\in E, B\in\mathscr{E}$，

$$P(s,t,u,v;a,b,c;B)=\overline{P}(u,b,B). \tag{64.1}$$

证 先证宽过去马氏性，即要证：

$$P\{X(s+u,t+v)\in B|\mathring{\mathscr{F}}_{st}^{*}\}$$
$$=P\{X(s+u,t+v)$$
$$\in B|X(s,t),X(s,t+v),X(s+u,t)\}, \tag{64.2}$$

其中

$$\mathring{\mathscr{F}}_{st}^{*}=\sigma\{X(a,b),a\leqslant s \text{ 或 } b\leqslant t\}. \tag{64.3}$$

由于引理5.63，只要证（64.2）左方等于 $\overline{P}(u,X(s,t+v),B)$，而后者是 $\mathring{\mathscr{F}}_{st}^{*}$ 可测的，故只要证

$$P\{A,X(s+u,t+v)\in B\}$$
$$=\int_A\overline{P}(u,X(s+u,t+v),B)dP. \tag{64.4}$$

对 $A\in\mathring{\mathscr{F}}_{st}^{*}$ 成立. 实际上，只需证对

$$A=\{X(a_i,b_i)\in B_i,1\leqslant i\leqslant n\},$$
$$a_i\leqslant s \text{ 或 } b_i\leqslant t,1\leqslant i\leqslant n. \tag{64.5}$$

成立即可.

记 $t_0=t+v$，使用记号(60.2). 易知(64.5)中的 $A\in\mathscr{A}(t_0+s)$，故(64.4)左方等于

$$P\{A,C(t_0+s+u)\in B\}$$
$$-\int_A P\{C(t_0+s+u)\in B|\mathscr{A}(t_0+s)\}dP$$

$$= \int_A P\{C(t_0+s+u)\in B|C(t_0+s)\}dP$$

$$= \int_A \overline{P}(u,C(t_0+s),B)dP$$

得证 (64.4).

其次，要证明由（64.1）确定的族 $\mathscr{P}$ 是三点转移函数族.

关于 $\mathscr{P}$ 的齐次性，非负性和规范性的证明是平凡的. 对于（64.1），$\mathscr{P}$ 的水平转移性成为

$$\overline{P}(u_1+u_2,b,B) = \int_E \overline{P}(u_1,b,dc)\overline{P}(u_2,c,B). \qquad (64.6)$$

这正是关于 $\overline{P}$ 的 Kolmogorov-Chapman 方程，因而是成立的. 对于（64.1），$\mathscr{P}$ 的竖直转移性成为

$$\overline{P}(u,b,B) = \int_E \overline{P}(u,a,dc)\overline{P}(u,b,B),$$

对一切 $a\in E$ 上式是成立的，因为 $\overline{P}(u,a,E)=1$. ∎

5.65定理 *MM* 类过程具有1马氏性.

证 要证：对 $s,u\in S_+$，$s\leqslant u$，$H=\{t_1,\cdots,t_n\}\subset T_+$，$B_i\in\mathscr{E}$，$1\leqslant i\leqslant n$，有

$$P\{X(u,t_i)\in B_i,1\leqslant i\leqslant n|\mathring{\mathscr{F}}_s^1\}$$
$$= P\{X(u,t_i)\in B_i,1\leqslant i\leqslant n|X(s,t_i),1\leqslant i\leqslant n\}. \qquad (65.1)$$

其中

$$\mathring{\mathscr{F}}_s^1 = \sigma\{X(a,b),a\leqslant s,b\in T_+\}. \qquad (65.2)$$

由于（65.1）的右方是 $\mathring{\mathscr{F}}_s^1$ 可测的，故只要证明

$$P(AD) = \int_A P\{D|\mathscr{C}(H)\}dP. \qquad (65.3)$$

对 $A\in\mathring{\mathscr{F}}_s^1$ 成立即可，这里

$$D = \{X(u,t_i)\in B_i,1\leqslant i\leqslant n\}$$
$$\in \sigma\{X(a,t_i),1\leqslant i\leqslant n,a\geqslant s\}, \qquad (72.4)$$

$$\mathscr{C}(H)=\sigma\{X(s,t_i),1\leqslant i\leqslant n\},$$
$$H=\{t_1,\cdots,t_n\}. \tag{65.5}$$
实际上，只要对
$$A=\{X(a_j,b_j)\in C_j,1\leqslant j\leqslant m\},$$
$$a_j\leqslant s,b_j\in T_+,C_j\in\mathscr{E},1\leqslant j\leqslant m. \tag{65.6}$$
证明 (65.3) 即可.

引用引理5.61的记号和结论. (65.6) 中的 $A\in\mathscr{A}(H,s)$. 于是由引理5.61,
$$P(AD)=\int_A P\{D|\mathscr{A}(H,s)\}dP$$
$$=\int_A P\{D|\mathscr{C}(H)\}dP,$$
得证 (65.3). ∎

MM 类过程是否还具有其他的两参数马氏性?

先研究两参数单点马氏性. 由引理5.62，单点马氏性等价于：对 $(s,t)\in T,0<(u,v)\in T,B\in\mathscr{E}$,有
$$P\{X(s+u,t+v)\in B|Y(t)\}$$
$$=P\{X(s+u,t+v)\in B|X(s,t)\}. \tag{65.7}$$

如果 $\overline{P}$ 退化，即 $\overline{P}(s,y,B)=I_B(y),s\in S_+,y\in E,B\in\mathscr{E}$, $I_B(y)$ 是 B 的示性函数. 于是,每个状态 y 都是吸收的,从而 $U_t^y(s)=y$ 对一切 $s\in S_+$. 这样,$X(s,t)=U_t^{Y(t)}(s)=Y(t)$,从而(65.7)成立. 即 X 具有单点马氏性.

反之,如果 X 具有单点马氏性,即(65.7)成立,$\overline{P}$ 是否退化? 答案是肯定的.

5.66定理 $(\hat{q},\hat{P},\overline{P})$-$MM$ 类过程具有单点马氏性的充要条件是 $\overline{P}$ 退化.

证 设 (65.7) 成立. 特别地，取 $(u,v)=(0,0)$ 时,知 $X(s,t)$ 是 $\sigma\{Y(t)\}$ 可测的,因而存在 $\mathscr{E}$ 可测函数 $g(y),y\in E$(g 可能依赖于(s,t)),使得 $U_t^{Y(t)}(s)=X(s,t)=g(Y(t))$. 记测度 $F_t(dy)=P(Y(t)\in dy)$. 则对每个 $t\in T_+$ 以及 F_t 几乎一切 $y\in E$,有 $U_t^y(s)$

$= g(y)$，而 $g(y)$ 是与样本点 $\omega \in \Omega$ 无关的非随机的变量. 因此，对任意 $t \in T_+$ 及对 F_t 几乎一切 $y \in E$，$U_t^y = \{U_t^y(s), s \in S_+\}$ 是决定性的过程.

任意指定一个 $t \in T_+$ 和一个 $y \in E$，使 U_t^y 是决定性过程. 显然，决定性过程必定是独立过程. 依 $(\hat{q},\hat{P},\overline{P})$-$MM$ 类过程的构造，U_t^y 是齐次马氏过程，有齐次转移函数族 $\overline{P}$. 这样，U_t^y 是独立的同分布过程. 而独立同分布的决定性过程必是常值过程，故 $U_t^y(s) = C$（C 是与 s 无关的非随机值），取 $s = 0$，知 $C = y$. 于是 $U_t^y(s) = y$ 对 $s \in S_+$，从而 U_t^y 的齐次转移函数族 $\overline{P}$ 退化. ∎

5.67定理 $(\hat{q},\hat{P},\overline{P})$-$MM$ 类过程具有宽将来马氏性的充要条件是 $\overline{P}$ 退化.

证 设 $\overline{P}$ 退化. 往证 X 有宽将来马氏性，即：对 $(s,t),(s_i,t_i) \in T$，$s_i \geqslant s$ 或 $t_i \geqslant t$，$B_i \in \mathscr{E}$，$1 \leqslant i \leqslant n$，要证

$$
\begin{aligned}
& P\{X(s_i,t_i) \in B_i, 1 \leqslant i \leqslant n \mid \overset{\circ}{\mathscr{F}}_u\} \\
= & P\{X(s_i,t_i) \in B_i, 1 \leqslant i \\
& \leqslant n \mid X(s_i \wedge s, t_i \wedge t), 1 \leqslant i \leqslant n\}.
\end{aligned}
\tag{67.1}
$$

其中 $\overset{\circ}{\mathscr{F}}_u$ 由 (62.2) 确定.

由于 $\overline{P}$ 退化，故 $U_t^y(s) = y$，$X(s,t) = Y(t)$，(67.1) 成为

$$
P\{D \mid N_t\} = P\{D \mid M_t\}. \tag{67.2}
$$

其中

$$
\left.
\begin{aligned}
& N_t = \sigma\{Y(b), b \leqslant t\}, M_t = \sigma\{Y(t_i \wedge t), 1 \leqslant i \leqslant n\} \\
& D = \{Y(t_i) \in B_i, 1 \leqslant i \leqslant n\} = D_1 D_2, \\
& D_l = \{Y(t_i) \in B_i, i \in J_l\}, l = 1,2, \\
& J_1 = \{i : t_i < t\}, J_2 = \{i : t_i \geqslant t\}.
\end{aligned}
\right\}
\tag{67.3}
$$

由于 $D_1 \in N_t$，$D_2 \in \sigma\{Y(b), b \geqslant t\}$，故

$$
\begin{aligned}
& P\{D_1 D_2 \mid N_t\} = I_{D_1} P\{D_2 \mid N_t\} \\
= & I_{D_1} P\{D_2 \mid Y(t)\}.
\end{aligned}
\tag{67.4}
$$

由于 $M_t \subset N_t$，故

$$P\{D_1D_2|M_t\} = E\{P[D_1D_2|N_t]|M_t\}$$
$$= E\{I_{D_1}P[D_2|Y(t)]|M_t\}. \qquad (67.5)$$

如果 $J_2=\varnothing$，则 $D_2=\Omega, D_1\in M_t=\sigma\{Y(t_i),1\leqslant i\leqslant n\}$，故(67.4)(67.5)均等于 I_{D_1}，从而(67.2)成立. 如果 $J_2\neq\varnothing$，则 $D_1\in M_t=\sigma\{Y(t),Y(t_i),i\in J_1\}$，故(67.5)右方等于(67.4)右方，从而(67.2)成立. 定理的充分性得证.

今设 $\overline{P}$ 非退化. 依定理 5.66，X 不具有单点马氏性. 而宽将来马氏性蕴含单点马氏性，所以 X 不具有宽将来马氏性. ∎

5.68定理 $(\hat{q},\hat{P},\overline{P})$-$MM$ 类过程具有 2 马氏性的充要条件是 $\overline{P}$ 退化.

证 **充分性** 设 $\overline{P}$ 退化. 要证：对 $s_i\in S_+,1\leqslant i\leqslant n,t,v\in T_+,B_i\in\mathscr{E},1\leqslant i\leqslant n,\mathring{\mathscr{F}}_t^2=\sigma\{X(a,b),a\in T_+,b\leqslant t\}$，有

$$P\{X(s_i,t+v)\in B_i,1\leqslant i\leqslant n|\mathring{\mathscr{F}}_t^2\}$$
$$=P\{X(s_i,t+v)\in B_i,1\leqslant i$$
$$\leqslant n|X(s_1,t),\cdots,X(s_n,t)\}. \qquad (68.1)$$

由于 $\overline{P}$ 退化，故 $X(s,t)=Y(t)$，即要证：$B=B_1B_2\cdots B_n$，

$$P\{Y(t+v)\in B|Y(b),b\leqslant t\}$$
$$=P\{Y(t+v)\in B|Y(t)\}. \qquad (68.2)$$

因为 Y 是马氏过程，(68.2) 是成立的.

必要性 设 $\overline{P}$ 非退化. 依定理5.67，X 不具有宽将来马氏性. 又由于 i 马氏性 $(i=1,2)$ 蕴含宽将来马氏性，而依定理 5.65，X 具有 1 马氏性. 所以，X 不具有 2 马氏性. ∎

5.69定理 $(\hat{q},\hat{P},\overline{P})$-$MM$ 类过程具有 * 马氏过程的充要条件是 $\overline{P}$ 退化.

证 设 $\overline{P}$ 退化. 由定理5.68知，X 有2马氏性. 结合定理5.65，X 具有 i 马氏性 $(i=1,2)$，而 i 马氏性$(i=1,2)$ 等价于 * 马氏性.

设 $\overline{P}$ 非退化. 由于 * 马氏性等价于宽将来马氏性并蕴含单点马氏性，结合定理5.67，X 不具有 * 马氏性. ∎

5.70总结 设 X 是 $(\hat{q},\hat{P},\overline{P})-MM$ 类过程.

(i) X 具有宽过去马氏性，三点转移函数族由 (64.1) 给出.

(ii) X 具有1马氏性.

(iii) 如果 $\overline{P}$ 退化，则 X 具有单点马氏性，2马氏性，宽将来马氏性，* 马氏性.

(iv) 如果 $\hat{P}$ 非退化，则 X 不具有单点马氏性，2马氏性，宽将来马氏性，* 马氏性.

第 3 篇

状态可列的两参数三点转移函数族

6 状态可列的三点转移函数族

三点转移函数族在宽过去马氏过程和 * 马氏过程中起着非常重要的作用．因此，很有必要对这种族进行深入研究．本章将研究这种族的解析性质．本章中，E 表示可列集，T_+^2 中的 (0，0)，简记为0.

§6.1 基本概念

6.1定义 设对任意 $i, j, k, r \in E$，给定四元函数 $P_{ijkr}(u, v; s, t)$，$0 \leqslant (u, v) \in T_+^2$，$0 < (s, t) \in T_+^2$，并简记 $P(u, v; s, t) = \{P_{ijkr}(u, v; s, t); i, j, k, r \in E\}$．称族 $\mathscr{P} = \{P(u, v; s, t); 0 \leqslant (u, v) \in T_+^2, 0 < (s, t) \in T_+^2\}$ 为三点转移函数族，如果下面的条件(A)——(D) 满足：

(A) 非负性　$P_{ijkr}(u, v; s, t) \geqslant 0.$

(B) 规范性　$\sum_r P_{ijkr}(u, v; s, t) = 1.$

(C) 水平转移性　$\forall\, l \in E$，$s, s' > 0$，有

$$P_{ijkr}(u,v;s+s',t) = \sum_{g\in E} P_{ijlg}(u,v;s,t) P_{lgkr}(u+s,v;s',t).$$

(D) 竖直转移性　$\forall\, l \in E$，$t, t' > 0$，有

$$P_{ijkr}(u,v;s,t+t') = \sum_{g\in E} P_{ilkg}(u,v;s,t) P_{ligr}(u,v+t;s,t').$$

如果条件 (B) 改为

(B′) 拟规范性　$\sum_{r} P_{ijkr}(u,v;s,t) \leqslant 1$,

称 $\mathscr{P}$ 是广义三点转移函数族.

6.2定义　称三点转移函数族 $\mathscr{P}$ 为齐次的，如果它的每个元素 $P_{ijkr}(u,v;s,t)$ 都不依赖于 u,v，此时，记 $P_{ijkr}(s,t) = P_{ijkr}(u,v;s,t)$，$P(s,t) = P(u,v;s,t)$.

今后，族 $\mathscr{P}$ 总是指齐次的，除非特别说明或明显地可以看出.

6.3定义　设 $\mathscr{P}$ 是三点转移函数族.

(i) 如果每个 $P_{ijkr}(s,t)$ 均与 $s>0$ 无关，称 $\mathscr{P}$ 是水平常值型的. 类似定义竖直常值型的. 如果 $\mathscr{P}$ 既是水平常值型的，又是竖直常值型的，称 $\mathscr{P}$ 是常值型的.

(ii) 如果 $\mathscr{P}$ 的每个元素 $P_{ijkr}(s,t)$ 是 s,t 的对称函数，即 $P(s,t) = P(t,s)$，称 $\mathscr{P}$ 是参数对称型的.

(iii) 如对 $\mathscr{P}$ 的每个元素，有

$$P_{ijkr}(s,t) = P_{ikjr}(s,t),$$

称 $\mathscr{P}$ 是状态对称型的.

§5.1中列出了三点转移函数族的三个例子. 例5.3是参数对称型的、例5.4中当 $\alpha=\beta$ 时是参数对称型的. 例5.5不仅是参数对称型的，也是状态对称型的. 我们就 E 可列时再给出族 $\mathscr{P}$ 的几个例.

例6.4　设 φ 和 ψ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的两个单调不减实值函数，$E = \{0,1\}$. 令

$$P_{ijkr}(u,v;s,t) = \frac{1}{2}\{1 + (-1)^{i-j-k+r} \cdot \exp[-(\varphi(u+s) - \varphi(u))(\psi(v+t) - \psi(v))]\},$$

则 $\mathscr{P}$ 是三点转移函数族. 它是状态对称型的.

例6.5　设 $E = \{0,1,2,\cdots,a-1\}(a \geqslant 2)$. 令

$$P_{ijkr}(s,t) = \begin{cases} \frac{1}{a} + \left(1 - \frac{1}{a}\right)c^{u}, & \text{如果 } i-j-k+r \equiv 0 (\mathrm{mod}\ a); \\ \frac{1}{a}(1 - c^{u}), & \text{其他.} \end{cases}$$

其中$0\leqslant c\leqslant 1$是常数.则$\mathscr{P}$是齐次三点转移函数族,它是参数对称型、状态对称型的.

例6.6 设$\pi=\{\pi_{ij}(t): i, j\in E, t>0\}$是单参数齐次转移函数族，令

$$\overline{P}_{ijkr}(s,t)=\pi_{kr}(t), \qquad \hat{P}_{ijkr}(s,t)=\pi_{jr}(s),$$

则$\overline{\mathscr{P}}$和$\hat{\mathscr{P}}$都是齐次三点转移函数族，前者是水平常值型，后者是竖直常值型.

例6.7 设φ是由非负整数集$E=\{0,1,2,\cdots\}$到整数集Z的一一映射.令$M(i,j,k,r)=\varphi(i)-\varphi(j)-\varphi(k)+\varphi(r)$,

$$P_{ijkr}(s,t)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda st}(\lambda st)^{M(i,j,k,r)}}{M(i,j,k,r)!}, & \text{如} M(i,j,k,r)\geqslant 0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则$\mathscr{P}$是三点转移函数族，状态空间是E.它是参数对称型、状态对称型的.

6.8记号 $\mathscr{D}(E)$表示E上的概率分布$A=\{a_i,i\in E\}$全体.A_i为集中在点i的单点概率分布.A_{ij}为在$i,j\in E$上均有质量$\frac{1}{2}$的概率分布,当$i=j$时,分布A_{ij}化为A_i.记

$$\mathscr{D}^+(E)=\{A\in\mathscr{D}(E): \forall\, i,\ a_i>0\},$$

$$\Delta(E)=\{A_i\in\mathscr{D}(E):i\in E\},$$

$$\Delta^2(E)=\{A_{ij}\in\mathscr{D}(E):(i,j)\in E^2\}.$$

6.9引理 设b和$b_i(i\in E)$是实数.如果对任意$A\in\mathscr{D}^+(E)$都有$\sum\limits_i a_ib_i=b$,则$b_i=b(i\in E)$.

证 如E是单元素集，不待证.设E至少含两个元素.对任意$A\in\mathscr{D}^+(E)$及$k\in E,0<\lambda<1$,令$A'=(1-\lambda)A_k+\lambda A$,则$A'\in\mathscr{D}^+(E)$.对$A$和$A'$运用定理条件后,易得$b_k=b$. ∎

§6.2 关系定理

在单参数情形，可以将广义转移函数族化为转移函数族，只

要引进一个附加状态以扩大状态空间即可．然而，下面的例6.10说明，在两参数的情形，却未必能行．

6.10例　设 $E=\{0\}$．令

$$P_{0000}(u,v;s,t)=\exp[-(2us+s^2)(2vt+t^2)]<1, \tag{10.1}$$

则 $\mathscr{P}$ 是广义三点转移函数族．对此 $\mathscr{P}$，不能通过引入一个附加状态将 $\mathscr{P}$ 化为三点转移函数族．

谬设引入状态“1”后，$\mathscr{P}$ 可以扩充为 $\tilde{E}=\{0,1\}$ 上的三点转移函数族 $\widetilde{\mathscr{P}}$．则对任意的 u，v，s，t 有

$$\widetilde{P}_{0000}(u,v;s,t)=P_{0000}(u,v;s,t)<1. \tag{10.2}$$

由规范性（B）得

$$\widetilde{P}_{0001}(u,v;s,t)=1-P_{0000}(u,v;s,t)>0. \tag{10.3}$$

由水平转移性（C）得

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_{0000}(u,v;s+s',t)&=\widetilde{P}_{0000}(u,v;s,t)\widetilde{P}_{0000}(u+s,v;s',t)\\&\quad+\widetilde{P}_{0001}(u,v;s,t)\widetilde{P}_{0100}(u+s,v;s',t).\end{aligned} \tag{10.4}$$

注意（10.2）及 $\mathscr{P}$ 的水平转移性（C），上式右方第一项等于 $P_{0000}(u,v;s+s',t)$，从而等于上式左方．于是 $\widetilde{P}_{0001}(u,v;s,t)\cdot\widetilde{P}_{0100}(u+s,v;s',t)=0$，注意（10.3）便得 $\widetilde{P}_{0100}(u+s,v;s',t)=0$．由 u，s，v，s'，t 的任意性，即

$$\widetilde{P}_{0100}(u,v;s,t)\equiv 0, \tag{10.5}$$

从而由 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 的规范性（B）得

$$\widetilde{P}_{0101}(u,v;s,t)\equiv 1. \tag{10.6}$$

由 $\widetilde{\mathscr{P}}$ 的竖直转移性及（10.5）（10.6）得

$$\widetilde{P}_{0000}(u,v;s,t+t')=\widetilde{P}_{1010}(u,v+t;s,t'). \tag{10.7}$$

由（10.1）（10.2）知上式两边关于 $t>0$ 连续，令 $t\downarrow 0$ 得

$$\widetilde{P}_{0000}(u,v;s,t')=\widetilde{P}_{1010}(u,v;s,t'). \tag{10.8}$$

由（10.2）及 $\mathscr{P}$ 的竖直转移性得

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_{0000}(u,v;s,t+t')&=P_{0000}(u,v;s,t+t')\\&=P_{0000}(u,v;s,t)P_{0000}(u,v+t;s,t')\\&=\widetilde{P}_{0000}(u,v;s,t)\widetilde{P}_{0000}(u,v+t;s,t').\end{aligned} \tag{10.9}$$

注意(10.8)，上式右方第二因子等于 $\widetilde{P}_{1010}(u,v+t;s,t')$，再注意(10.7)，它又等于 $\widetilde{P}_{0000}(u,v;s,t+t')$，从而(10.9)两端成为

$$P_{0000}(u,v;s,t+t')$$
$$=P_{0000}(u,v;s,t)P_{0000}(u,v;s,t+t').$$

因 $P_{0000}(u,v;s,t+t')>0$，故 $P_{0000}(u,v;s,t)=1$，此与(10.1)相矛盾. 所以谬设不成立. ■

例6.10说明，广义三点转移函数族与单参数广义转移函数族是有本质的区别的. 然而，它们又有密切联系.

6.11定理 （关系定理）$\mathscr{P}=\{P(u,v;s,t)\}$ 是广义(相应地，狭义)三点转移函数族的充要条件是下面的(i)(ii)成立：

(i) 任意固定 $v\geqslant 0,t>0,A\in\mathscr{D}(E)$，记

$$P_A^{v,t}(u,s)=\{a_kP_{ijkr}(u,v;s,t):(i,j),(k,r)\in E^2\}\tag{11.1}$$

则 $\mathscr{P}_A^{v,t}=\{P_A^{v,t}(u,s):u\geqslant 0,s>0\}$ 是以 E^2 为状态空间的单参数广义（相应地，狭义）转移函数族.

(ii) 任意固定 $u\geqslant 0,s>0,A\in\mathscr{D}(E)$，记

$$\hat{P}_A^{u,s}(v,t)=\{a_jP_{ijkr}(u,v;s,t):(i,k),(j,r)\in E^2\}.\tag{11.2}$$

则 $\hat{\mathscr{P}}_A^{u,s}=\{\hat{P}_A^{u,s}(v,t):v\geqslant 0,t>0\}$ 是以 E^2 为状态空间的单参数广义(相应地，狭义)转移函数族.

证　必要性　只证 (i)，类似证 (ii).

$\mathscr{P}_A^{v,t}$ 的非负性平凡.

(α) 由 (B′)（相应地，(B)）及 $\sum\limits_i a_i=1$ 得

$$\sum_{(k,r)\in E^2}[a_kP_{ijkr}(u,v;s,t)]$$
$$=\sum_k a_k\Big[\sum_r P_{ijkr}(u,v;s,t)\Big]$$
$$\leqslant(\text{相应地，}=)\sum_k a_k=1.$$

(β) 由 (C)，

$$\sum_{(l,g)\in E^2}[a_l P_{ijlg}(u,v;s,t)][a_k P_{lgkr}(u+s,v;s',t)]$$
$$= \sum_l a_l a_k \Big[\sum_g P_{ijlg}(u,v;s,t) P_{lgkr}(u+s,v;s',t)\Big]$$
$$= \sum_l a_l a_k P_{ijkr}(u,v;s+s',t)$$
$$= [a_k P_{ijkr}(u,v;s+s',t)].$$

充分性

往证 (B′)(相应地,(B)):取 $A_k \in \mathscr{D}(E)$,由(α) 得

$$\sum_r P_{ijkr}(u,v;s,t) = \sum_{(l,r)\in E^2} a_l P_{ijlr}(u,v;s,t)$$
$$\leqslant 1(相应地,=1).$$

往证 (C)　取 $A_k \in \mathscr{D}(E)$. 由(β) 得

$$P_{ijkr}(u,v;s+s',t) - [a_k P_{ijkr}(u,v;s+s',t)]$$
$$= \sum_{(l,g)\in E^2}[a_l P_{ijlg}(u,v;s,t)][a_k P_{lgkr}(u+s,v;s',t)]$$
$$= \sum_g P_{ijkg}(u,v;s,t) P_{kgkr}(u+s,v;s',t). \tag{11.3}$$

再对任意 $l \in E$,取 $A_{kl} \in \mathscr{D}(E)$,由($\beta$) 得

$$\frac{1}{2}P_{ijkr}(u,v;s+s',t) = a_k P_{ijkr}(u,v;s+s',t)$$
$$= \sum_{(m,g)\in E^2}[a_m P_{ijmg}(u,v;s,t)][a_k P_{mgkr}(u+s,v;s',t)]$$
$$= \sum_g\Big[\frac{1}{2}P_{ijkg}(u,v;s,t)\Big]\Big[\frac{1}{2}P_{kgkr}(u+s,v;s',t)\Big]$$
$$+ \sum_g\Big[\frac{1}{2}P_{ijlg}(u,v;s,t)\Big]\Big[\frac{1}{2}P_{lgkr}(u+s,v;s',t)\Big]. \tag{11.4}$$

由 (11.3)(11.4) 立得(C). 同理证(D). ∎

由上述证明立得下面结论:

6.12推论　在定理 6.11 中把 $A \in \mathscr{D}(E)$ 换成 $A \in \Delta^2(E) \cup \Delta(E)$,相应的结论仍然正确.

6.13定理　在定理6.11中,把 $\mathscr{D}(E)$ 换成 $\mathscr{D}^+(E)$ 后,相应的结论仍然成立.

证 必要性由定理6.11得出. 往证充分性. 由$\mathscr{P}_A^{v,t}$的规范性, (α)及引理6.9立即得定义6.1(B). 由$\mathscr{P}_A^{v,t}$的拟规范性, $\sum_r a_i = 1$及(α)可得(B′). 如设不然, 存在$i,j,k,r \in E, u_0,v_0 \geq 0, s_0,t_0 > 0$, 使$\sum_r P_{ijkr}(u_0,v_0;s_0,t_0) > 1$, 则取$A \in \mathscr{D}^+(E)$, 使$a_k \sum_r P_{ijkr}(u_0, v_0;s_0,t_0) > 1$, 于是

$$\sum_{(l,r)\in E^2} a_l P_{ijlr}(u_0,v_0;s_0,t_0)$$
$$\geq a_k \sum_r P_{ijkr}(u_0,v_0;s_0,t_0) > 1.$$

这与(α)矛盾, 故(B′)成立.

往证(C). 由(β)得

$$[a_k P_{ijkr}(u,v;s+s',t)]$$
$$= \sum_{(l,g)\in E} [a_l P_{ijlg}(u,v;s,t)] \cdot [a_k P_{lgkr}(u+s,v;s',t)].$$

因$a_k > 0$, 故

$$P_{ijkr}(u,v;s+s',t)$$
$$= \sum_l a_l \sum_g P_{ijlg}(u,v;s,t) P_{lgkr}(u+s,v;s',t).$$

依引理6.9知对任意$l \in E$, (C)成立. 同理可证(D). ∎

§6.3 可测性和远近极限

6.14定义 设$\mathscr{P} = \{P(s,t)\}$是齐次三点转移函数族, $T_+^2 = R_+^2$.

(i) 如果对任意固定的$t > 0$, $P_{ijkr}(s,t)$是$s \in (0,\infty)$上的勒贝格可测函数, 称$\mathscr{P}$是水平可测的.

(ii) 如果对任意固定的$s > 0$, $P_{ijkr}(s,t)$是$t \in (0,\infty)$上的勒贝格可测函数, 称$\mathscr{P}$是竖直可测的.

(iii) 如果$P_{ijkr}(s,t)$是$(s,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$上的勒贝格可测函数, 称$\mathscr{P}$是可测的.

6.15定理 设$\mathscr{P}$是齐次的三点转移函数族. 则以下五个条件

等价：

(i) $\mathscr{P}$ 水平可测.

(ii) 对任意 $i,j,k \in E, a > 0, t > 0$，有

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{s \geq a} \sum_r |P_{ijkr}(s+h,t) - P_{ijkr}(s,t)| = 0. \qquad (15.1)$$

(iii) 对任意 $i,j,k,r \in E, a > 0, t > 0, P_{ijkr}(\cdot,t)$ 在 $[a,\infty)$ 上一致连续，而且此一致性对 $r \in E$ 也成立.

(iv) 对任意 $i,j,k,r \in E, t > 0, P_{ijkr}(\cdot,t)$ 在 $(0,\infty)$ 上连续.

(v) 水平近极限

$$u_{ijkr}(t) = \lim_{s \downarrow 0} P_{ijkr}(s,t), t > 0, \qquad (15.2)$$

存在.

记 $\mathscr{U} = \{U(t); t > 0\}$，其中

$$U(t) = \{u_{ijkr}(t); i,j,k,r \in E\}, \qquad (15.3)$$

称 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{P}$ 的水平近极限族，它具有下列性质：

(a) 非负性 $u_{ijkr}(t) \geq 0$，对 $t > 0$.

(b) 拟规范性 $\sum_r u_{ijkr}(t) \leq 1$，对 $t > 0$.

(c) 水平幂等性 对 $t > 0$，

$$u_{ijkr}(t) = \sum_g u_{ijlg}(t) u_{lgkr}(t), \forall l \in E. \qquad (15.4)$$

(d) 拟竖直转移性 对 $t, t' > 0$

$$u_{ijkr}(t+t') \geq \sum_g u_{ilkg}(t) u_{ljgr}(t'), \forall l \in E. \qquad (15.5)$$

(e) 对 $s, t > 0$，

$$P_{ijkr}(s,t) = \sum_g P_{ijlg}(s,t) u_{lgkr}(t), \forall l \in E. \qquad (15.6)$$

(f) 对 $s, t > 0$，

$$P_{ijkr}(s,t) \geq \sum_g u_{ijlg}(t) P_{lgkr}(s,t), \forall l \in E. \qquad (15.7)$$

(g) 对 $t > 0$，$\sum_r u_{ijkr}(t)$ 与 $k \in E$ 无关.

证 (i)⇒(ii) 任意固定 $a, t > 0$ 及 $k_0 \in E$，取 $A_{k_0} \in \Delta(E)$. 由关系定理 6.11，由(11.1)中的矩阵(它与 u, v 无关，记为 $P^t_A(s)$)组成的族 $\mathscr{P}^t_A$ 是以 E^2 为状态空间的单参数齐次可测转移函数族. 对

族 $\mathscr{P}^t_{A_k}$ 应用定理 1.10(ii)，得

$$\begin{aligned}&\lim_{h\downarrow 0}\sup_{s\geqslant a}\sum_r |P_{ijk_0r}(s+h,t)-P_{ijk_0r}(s,t)|\\&=\lim_{h\downarrow 0}\sup_{s\geqslant a}\sum_{(k,r)\in E^2}|[a_kP_{ijkr}(s+h,t)]-[a_kP_{ijkr}(s,t)]|\\&=0.\end{aligned}$$

(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(i) 显然.

(i)⇒(v) 对任意的 $t>0, A\in\mathscr{D}^+(E)$，由关系定理6.11，可对族 $\mathscr{P}^t_A$ 应用定理1.10(Ⅴ)，得极限 $\lim\limits_{s\to 0}a_kP_{ijkr}(s,t)$存在，由 $a_k>0$ 知极限(15.2)存在. 对 $\mathscr{P}^t_A$ 用定理1.11知

$$[a_ku_{ijkr}(t)]=\sum_{(l,g)\in E^2}[a_lu_{ijlg}(t)][a_ku_{lgkr}(t)],$$

即

$$u_{ijkr}(t)=\sum_l a_l[\sum_g u_{ijlg}(t)u_{lgkr}(t)].$$

由定义 6.1(D) 的竖直转移性及 Fatou 引理知，(15.4) 中用“≥”代替“=”后成立，从而由上式知 (15.4) 中等号必定成立，即 (c) 成立. 其余的 (b) (d) —— (f) 各条可由 Fatou 引理和控制收敛定理得到. (g) 由 (b)、(c) 得到.

(v)⇒(i) 由控制收敛定理和水平转移性得

$$\lim_{h\downarrow 0}P_{ijkr}(s+h,t)=\sum_g P_{ijlg}(s,t)u_{lgkr}(t),$$

即 $P_{ijkr}(s,t)$ 在 $s>0$ 上有右极限，从而 $P_{ijkr}(\cdot,t)$ 只有至多可列个不连续点，因而 $P_{ijkr}(\cdot,t)$ 是$(0,\infty)$ 上的勒贝格可测函数. ∎

与定理6.15对偶地有

6.16定理 设 $\mathscr{P}$ 是齐次三点转移函数族. 则下列五条等价：

(i) $\mathscr{P}$ 竖直可测.

(ii) 对任意 $i,j,k\in E, a>0, s>0$，有

$$\lim_{h\downarrow 0}\sup_{t\geqslant a}\sum_r|P_{ijkr}(s,t+h)-P_{ijkr}(s,t)|=0. \qquad (16.1)$$

(iii) 对任意 $i,j,k,r\in E, a>0, s>0, P_{ijkr}(s,\cdot)$ 在 $[a,\infty)$ 上一致连续，而且此一致性对 $r\in E$ 成立.

(iv) 对任意 $i,j,k,r\in E, s>0, P_{ijkr}(s,\cdot)$ 在$(0,\infty)$ 上连续.

(v) 竖直近极限

$$\hat{u}_{ijkr}(s)=\lim_{t\downarrow 0}P_{ijkr}(s,t), s>0, \tag{16.2}$$

存在. 记 $\hat{\mathscr{U}}=\{\hat{U}(s):s>0\}$,其中

$$\hat{U}(s)=\{\hat{u}_{ijkr}(s):i,j,k,r\in E\}, \tag{16.3}$$

称 $\hat{\mathscr{U}}$ 为 $\mathscr{P}$ 的竖直近极限族，它具有以下性质：

(a) 非负性　$\hat{u}_{ijkr}(s)\geqslant 0$.对 $s>0$.

(b) 拟规范性　$\sum_r \hat{u}_{ijkr}(s)\leqslant 1$,对 $s>0$.

(c) 竖直幂等性　对 $s>0$,

$$\hat{u}_{ijkr}(s)=\sum_g \hat{u}_{ilkg}(s)\hat{u}_{ljgr}(s),\forall\ l\in E. \tag{16.4}$$

(d) 拟水平转移性　对 $s>0,s'>0$,

$$\hat{u}_{ijkr}(s+s')\geqslant\sum_g \hat{u}_{ijlg}(s)\hat{u}_{lgkr}(s'),\forall\ l\in E. \tag{16.5}$$

(e) 对 $s,t>0$,

$$P_{ijkr}(s,t)=\sum_g P_{ilkg}(s,t)\hat{u}_{ljgr}(s),\forall\ l\in E. \tag{16.6}$$

(f) 对 $s,t>0$,

$$P_{ijkr}(s,t)\geqslant\sum_g \hat{u}_{ilkg}(s)P_{ljgr}(s,t),\forall\ l\in E. \tag{16.7}$$

(g) 对 $s>0$,$\sum_r \hat{u}_{ijkr}(s)$ 与 $j\in E$ 无关.

6.17定理　设 $\mathscr{P}$ 是齐次三点转移函数族,$\mathscr{P}$ 是水平可测的.则水平远极限

$$v_{ijkr}(t)=\lim_{s\to\infty}P_{ijkr}(s,t),\ t>0 \tag{17.1}$$

存在. 记 $\mathscr{V}=\{V(t):t>0\}$,其中

$$V(t)=\{v_{ijkr}(t):i,j,k,r\in E\}. \tag{17.2}$$

称 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{P}$ 的水平远极限族. 它有以下性质：

(a) 非负性　$v_{ijkr}(t)\geqslant 0$,对 $t>0$.

(b) 拟规范性　$\sum_r v_{ijkr}(t)\leqslant 1$,对 $t>0$.

(c) 水平幂等性　对 $t>0$,

$$v_{ijkr}(t) = \sum_g v_{ijlg}(t) v_{lgkr}(t), \forall\, l \in E. \qquad (17.3)$$

(d) 拟竖直转移性　对 $t, t' > 0$,

$$v_{ijkr}(t + t') \geqslant \sum_g v_{ilkg}(t) v_{ljgr}(t'), \forall\, l \in E. \qquad (17.4)$$

(e) 对 $s, t > 0$,

$$v_{ijkr}(t) = \sum_g v_{ijlg}(t) P_{lgkr}(s,t) = \sum_g P_{ijlg}(s,t) v_{lgkr}(t),$$
$$\forall\, l \in E. \qquad (17.5)$$

(f) $$v_{ijkr}(t) = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s}\int_0^s P_{ijkr}(s,t)\,ds, \text{对 } t > 0. \qquad (17.6)$$

证　利用关系定理6.11和定理1.12，1.13，仿定理6.15证明.

∎

6.18定理　设 $\mathscr{P}$ 是齐次三点转移函数族. 如果 $\mathscr{P}$ 水平可测，并固定 $t > 0$，则 $P_{ijkr}(s,t)$ 在 $(0,\infty)$ 上或恒为零，或恒为正，且如果 $u_{irj}(t) = 0$，则 $\sum_r P_{ijkr}(s,t)$ 在 $s \in (0, M]$ 上一致收敛，这里 M 是正数. 对竖直可测的 $\mathscr{P}$ 有相应的结论. 如果 $\mathscr{P}$ 可测，则每个 $P_{ijkr}(s,t)$ 在 $(s,t) \in (0,\infty) \times (0,\infty)$ 上，或恒大于 0，或恒等于0.

证　由关系定理6.11和定理1.16得出.　∎

§6.4　可测族的表现定理

6.19引理　设 $\mathscr{L} = \{P_{ij}(t), i, j \in E, t > 0\}$ 是单参数齐次可测转移函数族. 则存在唯一的三元组 $(\mathscr{D}, \mathscr{U}, \Pi)$ 满足下面的 (i)(ii)(iii)：

(i) $\mathscr{D}$ 是 E 的一种分解：

$$\mathscr{D} = \{J_a; a \in \mathscr{G}\}, E = \bigcup_{a\in\mathscr{G}} J_a. \qquad (19.1)$$

$\mathscr{G}$ 是有限或可列无限的指标集.

(ii) $\mathscr{U} = \{u_j; j \in E\}$ 是非负数集，它将 $\mathscr{D}$ 分解成 $\mathscr{D} = \mathscr{D}_0 + \mathscr{D}_1$，使当 $J \in \mathscr{D}_0$ 时，$J = \{j\}$ 是单点集，且 $u_j = 0$，而当 $J \in \mathscr{D}_1$ 时，对一切 $j \in J$ 有 $u_j > 0$，且 $\sum_{j\in J} u_j = 1$.

(iii)$\pi = \{\pi_{IJ}(t): t > 0, I, J \in \mathscr{D}\}$ 是单参数齐次可测转移函数族，满足

$$\left.\begin{array}{l}\pi_{IJ}(t) = 0, \text{如 } I \in \mathscr{D}, J \in \mathscr{D}_0. \\ \lim\limits_{t \downarrow 0} \pi_{IJ}(t) = \delta_{IJ}, \text{如 } I \in \mathscr{D}_+, J \in \mathscr{D}_+.\end{array}\right\} \tag{19.2}$$

而且

$$P_{ij}(t) = \pi_{IJ}(t) u_j \quad \text{如 } i \in I \in \mathscr{D}, j \in J \in \mathscr{D}, t > 0. \tag{19.3}$$

反之，如存在满足上述 (i)(ii)(iii) 的三元组$(\mathscr{D}, \mathscr{U}, \pi)$，则由(19.3) 确定的族 $\mathscr{L}$ 是单参数齐次可测转移函数族.

证 基于定理1.14，1.15，并保持其中的记号. 令 $\mathscr{D}_+ = \mathscr{G}$，$\mathscr{D}_0 = (\{i\}: i \in F)$，$\mathscr{D} = \mathscr{D}_0 + \mathscr{D}_+$. 则定理1.15中的 $\mathscr{U} = \{u_j, j \in E\}$ 满足本定理的(ii). 对定理 1.15 中的$\{\pi_{IJ}(t), t > 0, I, J \in \mathscr{D}_+\}$，补充定义

$$\pi_{IJ}(t) = \begin{cases} 0, & \text{如 } I \in \mathscr{D}, J \in \mathscr{D}_0; \\ \pi_{iJ}(t), & \text{如 } I = \{i\} \in \mathscr{D}_0, J \in \mathscr{D}_+. \end{cases} \tag{19.4}$$

则 π 满足本定理的 (iii). 故得$(\mathscr{D}, \mathscr{U}, \pi)$. 唯一性证明甚易.

给定满足 (i)(ii)(iii) 的$(\mathscr{D}, \mathscr{U}, \pi)$，易证由 (19.2) 确定的族 $\mathscr{L}$ 是单参数齐次可测转移函数族. ∎

由定理1.14，1.15知，分解 (19.1) 是由 $\mathscr{L}$ 的近极限值 $u_{ij} = \lim\limits_{t \to 0} P_{ij}(t)$ 决定的，而$(u_{ij}, i, j \in E)$ 又决定数组 $\mathscr{U} = \{u_j, j \in E\}$. 故我们有

6.20定理 设 $\mathscr{L}$ 和 $\overline{\mathscr{L}}$ 是两个单参数齐次可测转移函数族，它们的三元组分别为 $(\mathscr{D}, \mathscr{U}, \pi)$ 和$(\overline{\mathscr{D}}, \overline{\mathscr{U}}, \overline{\pi})$. 如果 $\lim\limits_{t \to 0} P_{ij}(t) = \lim\limits_{t \to 0} \overline{P}_{ij}(t), i, j \in E$，则 $\mathscr{D} = \overline{\mathscr{D}}, \mathscr{U} = \overline{\mathscr{U}}$.

6.21定理 （水平表现定理） 设齐次三点转移函数族 $\mathscr{P}$ 是水平可测的. 固定 $t > 0$. 则存在唯一的三元组 $(\mathscr{D}(t), \mathscr{U}(t), \pi(t))$ 具有下列性质：

(i) $\mathscr{D}(t)$ 是 E^2 的一种分解：

$$\mathscr{D}(t) = \{M_a(t): a \in \mathscr{G}(t)\}, E^2 = \bigcup_{a \in \mathscr{G}(t)} M_a(t). \tag{21.1}$$

其中 $\mathscr{G}(t)$ 是有限或可列无限的指标集.

(ii) $\mathscr{U}(t)=\{u_{kr}(t):(k,r)\in E^2\}$ 将 $\mathscr{D}(t)$ 分解成 $\mathscr{D}(t)=\mathscr{D}_0(t)+\mathscr{D}_+(t)$，使满足条件 ($\alpha$).

条件 (α)：当 $M(t)\in\mathscr{D}_0(t)$ 时，$M(t)=\{(k,r)\}$ 是单点集，且 $u_{kr}(t)=0$；当 $M(t)\in\mathscr{D}_+(t)$ 时，对任意 $(k,r)\in M(t)$，有 $u_{kr}(t)>0$，且 $\sum\limits_{r\in M_k(t)}u_{kr}(t)=1$. 其中 $M_k(t)=\{r:(k,r)\in M(t)\}$ 是 $M(t)$ 的 k 截口. (21.2)

(iii) $\pi(t)=\{\pi_{M(t)N(t)}(s,t):s>0,M(t),N(t)\in\mathscr{D}(t)\}$ 是单参数齐次可测转移函数族，而且满足：

$$\left.\begin{aligned}&\pi_{M(t)N(t)}(s,t)=0,\\&\quad s>0,M(t)\in\mathscr{D}(t),N(t)\in\mathscr{D}_0(t),\\&\quad\lim_{s\to 0}\pi_{M(t)N(t)}(s,t)=\delta_{M(t)N(t)},\\&\quad M(t)\in\mathscr{D}_+(t),N(t)\in\mathscr{D}_+(t).\end{aligned}\right\}\qquad(21.3)$$

(iv) 对 $s>0$

$$\begin{aligned}P_{ijkr}(s,t)&=\pi_{M(t)N(t)}(s,t)u_{kr}(t),\\&\qquad\text{如}(i,j)\in M(t)\in\mathscr{D}(t),\\&\qquad(k,r)\in N(t)\in\mathscr{D}(t).\end{aligned}\qquad(21.4)$$

证 取 $A\in\mathscr{D}^1(E)$，固定 $t>0$. 由关系定理6.11，$\mathscr{P}^t_A=\{a_kP_{ijkr}(s,t),s>0,(i,j),(k,r)\in E^2\}$ 是以 E^2 为状态空间的单参数齐次可测转移函数族，从而可应用引理 6.19，存在唯一的三元组 $(\mathscr{D}(t),W(t),\pi(t))$. 令 $u_{kr}(t)=\dfrac{w_{kr}(t)}{a_k}$，则 $(\mathscr{D}(t),\mathscr{U}(t),\pi(t))$ 为所求，只需注意 $1=\sum\limits_{(k,r)\in M(t)}w_{kr}(t)=\sum\limits_k a_k\sum\limits_{r\in M_k(t)}u_{kr}(t)$ 当且仅当 $\sum\limits_{r\in M_k(t)}u_{kr}(t)=1$. 由定理6.20，$(\mathscr{D}(t),\mathscr{U}(t),\pi(t))$ 与 $A\in\mathscr{D}^1(E)$ 的选取无关. ∎

对偶地，如 $\mathscr{P}$ 是竖直可测的，则 $\mathscr{P}$ 有竖直表现定理，对应的三元组为 $(\hat{\mathscr{D}}(s),\hat{\mathscr{U}}(s),\hat{\pi}(s))$，略写.

6.22系 设 $\mathscr{P}$ 是三点转移函数族，$\mathscr{P}$ 水平可测. 对 $t>0$，

$u_{ijkr}(t), v_{ijkr}(t)$ 分别是 $P_{ijkr}(s,t)$ 的水平近极限和水平远极限. 则对 $s,h>0$,级数

$$\sum_r u_{ijkr}(t),\ \sum_r v_{ijkr}(t),\ \sum_r |P_{ijkr}(s+h,t)-P_{ijkr}(s,t)| \tag{22.1}$$

均与 $k\in E$ 无关. 而且当 $u_{ij}(t)>0$ 时,恒有

$$\sum_r u_{ijkr}(t)=1, k\in E. \tag{22.2}$$

证 由 (21.2)(21.3)(21.4) 得:如$(i,j)\in M(t)$,则

$$\sum_r u_{ijkr}(t)=\sum_{N(t)\in\mathscr{D}(t)}\Big[\lim_{s\to 0}\pi_{M(t)N(t)}(s,t)\sum_{r\in N_k(t)}u_{kr}(t)\Big]$$

$$=\sum_{N(t)\in\mathscr{D}(t)}\lim_{s\to 0}\pi_{M(t)N(t)}(s,t),\ k\in E.$$

故 (22.1) 第一个级数与 k 无关. 特别地,当 $u_{ij}(t)>0$ 时,即$(i,j)\in M(t)\in\mathscr{D}_+(t)$时,由定理 1.14,$u_{ijkr}(t)=\delta_{M(t)N(t)}u_{kr}$,$(k,r)\in N(t)$,再由(21.2) 知(22.2) 成立. 同理可证 (22.1) 的其余二级数与 k 无关. ∎

上述关于三点转移函数族的结果,容易证明对广义三点转移函数族亦成立. 作为定理6.18, 6.21等的一个简单应用,我们给出广义三点转移函数族的一个有趣结果.

6.23定理 设广义齐次三点转移函数族 $\mathscr{P}$ 可测,则存在常数 $0\leqslant a\leqslant 1$,使$\forall\, i,\ j,\ k,\ r\in E,\ s,\ t>0$,有

$$\sum_r P_{ijkr}(s,t)=a^s. \tag{23.1}$$

证 由水平表现定理 6.21(iv) 知,$\sum_r P_{ijkr}(s,t)$ 与 k 无关,由竖直表现定理,级数又与 j 无关. 故设 $\varphi_i(s,t)=\sum_r P_{ijkr}(s,t)$. 由水平转移性得:对任意 $l\in E$,有

$$\varphi_i(s+s',t)=\varphi_i(s,t)\varphi_l(s',t). \tag{23.2}$$

由定理6.18知,$\varphi_i(s,t)$ 在$(s,t)\in R_+^2-\lambda_0$ 上,或恒为正,或恒为零. 故由(23.2) 知 $\varphi_i(s,t)$ 与 $i\in E$ 也无关. 设 $\varphi(s,t)=\varphi_i(s,t)$. 由于 $\varphi(s,t)$ 对固定 $t>0$ 关于 $s>0$ 连续,故由

$$\varphi(s+s',t)=\varphi(s,t)\varphi(s',t),$$

有 $\varphi(s,t)=[a(t)]^s$，其中 $0\leqslant a(t)=\varphi(1,t)\leqslant 1$. 对称地有 $\varphi(s,t)=[b(s)]^t$，其中 $0\leqslant b(s)=\varphi(s,1)\leqslant 1$. 取 $a=\varphi(1,1)$，则 $0\leqslant a\leqslant 1$，$\varphi(s,t)=[\varphi(s,1)]^t=[\varphi(1,1)^s]^t=a^{st}$. ∎

为了下面讨论方便，集中引入下列记号.

6.24记号 基于定理6.21的三元组 $(\mathscr{D}(t),\mathscr{U}(t),\pi(t))$，记

(i) $E_0(s,t)=\{r\in E: P_{rrr}(s,t)=0\}$,

$E_+(s,t)=E-E_0(s,t)$.

(ii) $\mathscr{P}$ 水平可测时，记

$$E_0^2(t)=\{(k,r)\in E^2: u_{kr}(t)=0\}=\bigcup_{M\in\mathscr{D}_0(t)}M,$$

$$E_+^2(t)=E^2-E_0^2(t)=\bigcup_{M\in\mathscr{D}_+(t)}M.$$

$(i,j)\underset{t}{\overline{\backsim}}(k,r)\Leftrightarrow$ 存在 $M\in\mathscr{D}_+(t)$ 使 $(i,j),(k,r)\in M$.

(iii) $\mathscr{P}$ 竖直可测时，记

$$\hat{E}_0^2(s)=\{(k,r)\in E^2: \hat{u}_{kr}(s)=0\}=\bigcup_{\hat{M}\in\hat{\mathscr{D}}_0(s)}\hat{M},$$

$$\hat{E}_+^2(s)=E^2-\hat{E}_0^2(s)=\bigcup_{\hat{M}\in\hat{\mathscr{D}}_+(s)}\hat{M}.$$

$(i,k)\underset{s}{\backsim}(j,r)\Leftrightarrow$ 存在 $\hat{M}\in\hat{\mathscr{D}}_+(s)$ 使 $(i,k),(j,r)\in\hat{M}$.

6.25注 设 $\mathscr{P}$ 水平可测. 依定理6.11、6.15易证，$E_0(s,t)$，$E_+(s,t)$ 与 $s>0$ 无关，此时简记为 $E_0(t),E_+(t)$. 设 $\mathscr{P}$ 竖直可测，则 $E_0(s,t),E_+(s,t)$ 与 $t>0$ 无关，记为 $\hat{E}_0(s),\hat{E}_+(s)$. 设 $\mathscr{P}$ 可测，则 $E_0(s,t),E_+(s,t)$ 与 $s>0,t>0$ 无关，记为 E_0,E_+.

6.26注 设 $\mathscr{P}$ 水平可测. 则 $i\in E_0(t)\Leftrightarrow(i,i)\in E_0^2(t)$；$\mathscr{D}_+(t)=\varnothing\Rightarrow P(\cdot,t)\equiv 0$. 对 $\mathscr{P}$ 竖直可测，有类似的结论.

§6.5 近极限函数的性质

6.27定理 设 $\mathscr{P}$ 是三点转移函数族，$\mathscr{P}$ 是可测的. 则 $E_0^2(t)\equiv E_0^2,E_+^2(t)\equiv E_+^2$ 与 $t>0$ 无关. 而且对任意 $(i,j)\in E_+^2,(k,r)\in$

E^2,有

(i) $u_{ijkr}(t)$ 在$(0,\infty)$ 上连续.

(ii) $u_{ijkr}(t)$ 在$(0,\infty)$ 上,或恒大于 0,或恒等于 0.

(iii) 近极限 $u_{ijkr}(0+) = \lim\limits_{t\downarrow 0} u_{ijkr}(t)$ 存在.

(iv) 远极限 $u_{ijkr}(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} u_{ijkr}(t)$ 存在.

证 固定 $t_0>0$, 对任意 $(i,j) \in E_0^2(t_0)$,即 $u_{ij}(t_0) = 0$,由(21.4) 知 $P_{i\mu j}(s,t_0) \equiv 0$. 再由定理 6.18,对任意 $s > 0, t > 0$, $P_{i\mu j}(s,t) \equiv 0$. 再由(21.4) 及

$$P_{i\gamma j}(s,t) = \pi_{M(t)M(t)}(s,t)u_{ij}(t), \ s,t > 0,(i,j) \in M(t), \tag{27.1}$$

知,对任意 $t>0$, $u_{ij}(t) = 0$,即$(i,j) \in E_0^2(t)$. 故$E_0^2(t)$ 与 $t > 0$ 无关. .

为证 (i) — (iv), 先考虑 $j\in E_+$, 即 $(j,j) \in E_+^2$. 由(22.2) 知对任意$t > 0, k \in E$ 有 $\sum\limits_r u_{jjkr}(t) = 1$. 由此再利用不等式(15.5)易得

$$u_{jjkr}(t + t') = \sum_g u_{jjkg}(t)u_{jjgr}(t'). \tag{27.2}$$

于是实值函数族 $\mathscr{U}_{jj} = \{u_{jjkr}(t): t > 0, k,r \in E\}$ 是单参数齐次转移函数族. 由于 $\mathscr{P}$ 可测, 故族 $\mathscr{U}_{jj}$是可测族. 因此, $u_{jjkr}(t), t > 0$, 具有本定理的 (i) — (iv).

往证对任意 $(i,j) \in E_+^2$, $(k,r) \in E^2$, $u_{ijkr}(t), t > 0$, 具有(i)—(iv).

对任意 $(i,j) \in E_+^2$,则$(j,j) \in E_+^2$. 由(22.2), $\sum\limits_r u_{ijkr}(t) = 1$ 且$\sum\limits_r u_{jjkr}(t) = 1, t > 0, k \in E$,再利用(15.5) 可得

$$u_{ijkr}(t + t') = \sum_g u_{ijkg}(t)u_{jjgr}(t'). \tag{27.3}$$

由 $u_{jjgr}(t)$ 的连续性及控制收敛定理知 $u_{ijkr}(t)$ 在$(0,\infty)$ 上连续.

为证 (ii),令$G(t) = \{g \in E; u_{jjgr}(t) = 0\}$. 由于$u_{jjgr}(t)$ 在$(0,\infty)$ 上或恒正或恒零,故 $G(t) = G$ 与 $t > 0$ 无关. 于是从(27.3) 得

$$u_{ijkr}(t+t')=\sum_{g\in G}u_{ijkg}(t)u_{jjgr}(t').\tag{27.4}$$

今设存在$t_0>0$使$u_{ijkr}(t_0)=0$. 则由(27.4)知,$\forall\ t'\in(0,t_0)$, $g\in G$有$u_{ijkg}(t')=0$,于是,$\forall\ t>0$,取$t'\in(0,t\wedge t_0)$,则由(27.4)得

$$u_{ijkr}(t)=\sum_{g\in G}u_{ijkg}(t')u_{jjgr}(t-t')=0,$$

故 (ii) 得证.

证 (iii). 任取子列$\{t_n\}$,$\{t'_n\}$使$t_n\downarrow 0$,$t'_n\downarrow 0$,且对任意$(k,r)\in E^2$,极限$\overline{u}_{ijkr}=\lim\limits_{n\to\infty}u_{ijkr}(t_n)$,$\widetilde{u}_{ijkr}=\lim\limits_{n\to\infty}u_{ijkr}(t'_n)$均存在,往证$\overline{u}_{ijkr}=\widetilde{u}_{ijkr}$.

由于$\lim\limits_{t\to 0}u_{jjgr}(t)=u_{jjgr}$存在,故由(27.3)及(i)得

$$\widetilde{u}_{ijkr}\geqslant\sum_{g}\overline{u}_{ijkg}u_{jjgr},\quad \overline{u}_{ijkr}\geqslant\sum_{g}\widetilde{u}_{ijkg}u_{jjgr},$$

$$\widetilde{u}_{ijkr}\geqslant\sum_{g}\overline{u}_{ijkg}u_{jjgr}.\tag{27.5}$$

由(27.3)、(i)及控制收敛定理有

$$u_{ijkr}(t)=\sum_{g}u_{ijkg}(t)u_{jjgr}.$$

故当$\sum\limits_{r}u_{jjgr}<1$时有$u_{ijkg}(t)\equiv 0$. 于是$\overline{u}_{ijkg}=\widetilde{u}_{ijkg}=0$. 因此,在(27.5)中两边对$r\in E$求和得

$$\sum_{r}\overline{u}_{ijkr}\geqslant\sum_{r}\widetilde{u}_{ijkr}\geqslant\sum_{r}\overline{u}_{ijkr}.$$

故上式取等号,从而(27.5)中都取等号,于是$\overline{u}_{ijkr}=\widetilde{u}_{ijkr}$. 故(iii)得证. 仿(iii)的证明可证(iv). ∎

6.28注 对$(i,j)\in E_0^2$,$(k,r)\in E$,$u_{ijkr}(t)$,$t>0$,并不一定有上述性质(i)—(iv).

6.29定理 设$\mathscr{P}$是可测三点转移函数族,$\mathscr{P}$的水平三元组为$(\mathscr{D}(t),\mathscr{U}(t),\pi(t))$,$t>0$. 则$\mathscr{D}(t)=\mathscr{D}$与$t>0$无关,而且对任意$(k,r)\in E^2$,有

(i) $u_{kr}(t)$在$(0,\infty)$上连续.

(ii) $u_{kr}(t)$ 在$(0,\infty)$上，或恒为正，或恒为零.

(iii) 近极限 $u_{kr}(0+) = \lim_{t\to 0^+} u_{kr}(t)$ 存在.

(iv) 远极限 $u_{kr}(\infty) = \lim_{t\to\infty} u_{kr}(t)$ 存在.

证 要证 $\mathscr{D}(t)$ 与 $t > 0$ 无关，只要证：$\forall\ t,t' > 0, M(t) \in \mathscr{D}(t), M(t') \in \mathscr{D}(t')$，都有

$$M(t) \cap M(t') = \varnothing \text{ 或 } M(t) = M(t'). \tag{29.1}$$

设 $M(t) \cap M(t') \neq \varnothing$，则存在$(i,j) \in M(t) \cap M(t')$.

(i) 如$(i,j) \in E_0^2$，则 $M(t) = M(t') = \{(i,j)\}$.

(ii) 如$(i,j) \in E_+^2$，则 $M(t) \in \mathscr{D}_+(t), M(t') \in \mathscr{D}_+(t')$. 设 $M(t) - M(t') \neq \varnothing$，即存在$(k,r) \in M(t) - M(t')$. 设$(k,r) \in N(t'), N(t') \neq M(t')$，则由(21.4)得

$$P_{ijkr}(s,t) = \pi_{M(t)N(t)}(s,t)u_{kr}(t),$$

$$P_{ijkr}(s,t') = \pi_{M(t')N(t')}(s,t')u_{kr}(t').$$

由 (21.3) 得

$$u_{ijkr}(t) = u_{kr}(t) > 0, u_{ijkr}(t') = 0 \cdot u_{kr}(t') = 0.$$

此与定理6.27 (ii) 相矛盾. 故 $M(t) - M(t') = \varnothing$. 同理，$M(t') - M(t) = \varnothing$. 所以 $M(t) = M(t')$，得证(29.1).

对任意 $(k,r) \in E^2$，

(a) 如$(k,r) \in E_0^2$，则 $u_{kr}(t) \equiv 0$，(i)—(iv) 显然成立.

(b) 如 $(k,r) \in E_+^2$，则存在 $M \in \mathscr{D}_+$，使 $(k,r) \in M$，由(21.3)(21.4) 得

$$P_{krkr}(s,t) = \pi_{MM}(s,t)u_{kr}(t),$$

$$u_{krkr}(t) = 1 \cdot u_{kr}(t) = u_{kr}(t).$$

故由定理6.27知本定理 (i) — (iv) 成立. ■

对于竖直情形，有类似定理6.27，6.29的相应结果.

6.30系 如果 $\mathscr{P}$ 可测，则

(i) 对任意 $N \in \mathscr{D}_0$，存在 $\hat{M} \in \hat{\mathscr{D}}$ 及唯一的 $\hat{N} \in \hat{\mathscr{D}}$ 使 $N \subset \hat{N}$，且对任意 $s,t > 0$，

$$\pi_{\hat{M}\hat{N}}(s,t) = 0. \tag{30.1}$$

(ii) 对任意 $N \in \mathscr{D}_+$, $M \in \mathscr{D}$, $\hat{M} \in \hat{\mathscr{D}}$, $M \cap \hat{M} \neq \varnothing$, $(i,j) \in M \cap \hat{M}$，有

$$\pi_{MN}(s,t) = \sum_{\hat{N} \in \hat{\mathscr{D}}_+} \hat{\pi}_{\hat{M}\hat{N}}(s,t) \sum_{r \in [N \cap \hat{N}]_j} \hat{u}_{jr}(s). \tag{30.2}$$

其中记号 $A_j = \{i:(i,j) \in A\}$ 表示集合 A 的 j 截口.

(iii) 如果(i) 中的 $\hat{M} \in \hat{\mathscr{D}}_+$，则极限存在且

$$\lim_{t \downarrow 0} \pi_{MN}(s,t) = \sum_{r \in [N \cap \hat{M}]_j} \hat{u}_{jr}(s). \tag{30.3}$$

证 (i) 因 $N \in \mathscr{D}_0$，故存在唯一的 $(j,r) \in E_0^2$ 使 $N = \{(j,r)\}$. 对任意 $i \in E$，存在 $\hat{M}, \hat{N} \in \hat{\mathscr{D}}$，使 $(i,j) \in \hat{M}$，$(j,r) \in \hat{N}$. 由 (21.4) 及其竖直形式，

$$P_{ijjr}(s,t) = \pi_{MN}(s,t)u_{jr}(t) = 0,$$

$$P_{ijjr}(s,t) = \hat{\pi}_{\hat{M}\hat{N}}(s,t)\hat{u}_{jr}(s).$$

由 (21.3) 的竖直形式知，无论 $\hat{u}_{jr}(s) > 0$ 与否，都有 $\hat{\pi}_{\hat{M}\hat{N}}(s,t) = 0$，$s > 0$，$t > 0$. 而 $N = \{(j,r)\} \subset \hat{N}$，因此 $\hat{N}$ 是唯一的.

(ii) 由 (21.4) 及其竖直形式得：

$$P_{ijjr}(s,t) = \pi_{MN}(s,t)u_{jr}(t) = \hat{\pi}_{\hat{M}\hat{N}}(s,t)\hat{u}_{jr}(s).$$

其中，$(i,j) \in M \cap \hat{M}$，$(j,r) \in N \cap \hat{N}$. 在上式两边对 $r \in N_j$ 求和，注意 $\sum_{r \in N_j} u_{jr} = 1$，立得 (30.2).

(iii) 任取子列 $t_n \to 0+$，使对一切 $M, N \in \mathscr{D}$，极限 $\pi_{MN}(s) = \lim_{n \to \infty} \pi_{MN}(s,t_n)$ 存在. 则由 (30.2) 及 $\hat{M} \in \hat{\mathscr{D}}_+$ 知

$$\pi_{MN}(s) \geqslant \sum_{r \in [N \cap \hat{M}]_j} \hat{u}_{jr}(s). \tag{30.4}$$

在上式中两边对 $N \in \mathscr{D}$ 求和，得

$$1 \geqslant \sum_{N \in \mathscr{D}} \pi_{MN}(s) \geqslant \sum_{N \in \mathscr{D}} \sum_{r \in [N \cap \hat{M}]_j} \hat{u}_{jr}(s)$$

$$= \sum_{r \in \hat{M}_j} \hat{u}_{jr}(s) = 1.$$

故 (30.4) 为等式，即

$$\lim_{n\to+\infty}\pi_{MN}(s,t_n)=\sum_{r\in N\cap M_j}\hat{u}_{jr}(s).$$

由于 $\{t_n\}$ 的任意性，(iii) 得证. ∎

7 三点转移函数族的标准性和参数对称性

§7.1 标准性和状态偶空间的分解

7.1定义 称三点转移函数族 $\mathscr{P}$ 为水平标准的，如果对任意 $t>0$，i，$j\in E$，有

$$\lim_{s\to 0+} P_{ijij}(s,t)=1. \tag{1.1}$$

称 $\mathscr{P}$ 为竖直标准的，如果对任意 $s>0$，i，$j\in E$，有

$$\lim_{t\to 0+} P_{iijj}(s,t)=1. \tag{1.2}$$

称 $\mathscr{P}$ 为标准的，如 $\mathscr{P}$ 是水平标准和竖直标准的.

7.2定理 设 $\mathscr{P}$ 是三点转移函数族. 则下列二条件等价.

(i) $\mathscr{P}$ 是水平标准的.

(ii) $\mathscr{P}$ 是水平可测的，其对应的三元组 $(\mathscr{D}(t),\mathscr{U}(t),\pi(t))$，$t>0$，满足：

(a) $\forall\ (k,r)\in E$，有 $u_{kr}(t)=1$，即 $\mathscr{D}_0(t)=\varnothing$ 且 $\mathscr{D}_1(t)$ 中的元素为单点集.

(b) $\forall\ N(t)\in\mathscr{D}(t)$，$k\in E$，存在唯一的 $r\in E$，使 $(k,r)\in N(t)$.

证 (i) $\Rightarrow$ (ii) 设 s，t，$h>0$. 由 $\mathscr{P}$ 的水平转移性及规范性，

$$\begin{aligned}
&P_{ijkr}(s+h,t)-P_{ijkr}(s,t)\\
&=\sum_{g}P_{ijjg}(h,t)P_{igkr}(s,t)-P_{ijkr}(s,t)\\
&=P_{ijkr}(s,t)[P_{ijjj}(h,t)-1]+\sum_{g\neq j}P_{ijjg}(h,t)P_{igkr}(s,t).
\end{aligned}$$

第一项非正，后一项非负且 $\leqslant \sum_{g\neq j} P_{ijig}(h,t) = 1 - P_{ijij}(h,t)$，

故
$$|P_{ijkr}(s+h,t) - P_{ijkr}(s,t)| \leqslant 1 - P_{ijij}(h,t). \quad (2.1)$$
由 (1.1) (2.1) 知 $P_{ijkr}(\cdot,t)$ 在$(0,\infty)$ 上右连续，同理可证左连续，从而连续. 由定理6.15知 $\mathscr{P}$ 水平可测. 从而由 (6.21.3) (6.21.4) 及 (1.1) 得 (a).

往证(b). 先证存在性. 谬设对任意$r\in E$，都有$(k,r)\notin N(t)$. 取$(i,j)\in N(t)$，则对任意 $t>0$ 有 $u_{ijkr}(t)=0$. 由 r 的任意性，$\sum_r u_{ijkr}(t)=0$. 由系6.22及 (a)，这与 (6.22.2) 相矛盾.

证 (b) 的唯一性. 谬设存在 $j\neq r$，使 $(k,r)\in N(t),(k,j)\in N(t)$. 由定理 6.21，
$$1 = \sum_{g\in N_k(t)} u_{kg}(t) \geqslant u_{kr}(t) + u_{kj}(t) = 2,$$
矛盾.

(ii)⇒(i)　设$(i,j)\in E^2,(i,j)\in N(t),N(t)\in \mathscr{D}(t)$. 由定理 6.21(iii) 及$(a)$ 有
$$\lim_{s\to 0+} P_{ijij}(s,t) = \lim_{s\to 0+} \pi_{N(t)N(t)}(s,t) = 1. \qquad \blacksquare$$

7.3定理　设 $\mathscr{P}$ 是水平标准的.

(i) 任意固定 $i,k\in E$，定义映射 $f=f_{ik}$: $E\to E$，$f(j)=r$：(k,r) 与(i,j) 属于 $\mathscr{D}(t)$ 中的同一个类. 则 f 是一一对应的映射.

(ii) 固定 $t>0$，存在单参数齐次标准转移函数族 $\pi(t)=\{\pi_{I(t)J(t)}(s,t),s>0,I(t),J(t)\in\mathscr{D}(t)\}$ 满足：对 $s>0$，
$$P_{ijkr}(s,t) = \pi_{I(t)J(t)}(s,t),(i,j)\in I(t),(k,r)\in J(t). \quad (3.1)$$

证　(i) 由定理7.2 (b)，$\forall j\in E$，满足 (i) 中的 r 存在且唯一. 故 f：$E\to E$ 确为映射.

设 $j\neq j'$. 则存在 $I(t),J(t)\in\mathscr{D}(t)$，使$(i,j)\in I(t),(i,j')\in J(t)$. 由定理 7.2$(a)$，$I(t)\cap J(t)=\varnothing$. 由 f 的定义，$(k,f(j))\in I(t),(k,f(j'))\in J(t)$. 故 $f(j)\neq f(j')$，即 f 是单射.

设 $r\in E$. 必存在 $J(t)\in\mathscr{D}(t)$ 使$(k,r)\in J(t)$. 但对 i，必存在

j 使 $(i,j) \in J(t)$，从而 $f(j) = r$. 故 f 是满射.

(ii) 由定理7.2 (a) 及 (6.21.4)(6.21.3) 得出.

对于竖直情形，有类似定理7.2，7.3的相应结论.

7.4定理 设 $\mathscr{P}$ 是标准三点转移函数族. $\mathscr{P}$ 的水平三元组为 $(\mathscr{D}(t),\mathscr{U}(t),\pi(t))$，$t > 0$，竖直三元组为 $(\hat{\mathscr{D}}(s),\hat{\mathscr{U}}(s),\hat{\pi}(s))$，$s > 0$. 则

(i) $\mathscr{D}(t)$ 与 $t > 0$ 无关，$\hat{\mathscr{D}}(s)$ 与 $s > 0$ 无关. 设 $E = \{0,1,2,\cdots,d\}$ 或 $E = \{0,1,2,\cdots\}$，则 E^2 的水平分解和竖直分解可以对 $I \in \mathscr{D}$ 和 $\hat{I} \in \hat{\mathscr{D}}$ 适当编号后写为：

$$E^2 = \bigcup_{n\in E} I_n, \ E^2 = \bigcup_{n\in E} \hat{I}_n. \tag{4.1}$$

其中，I_n 和 $\hat{I}_n$ 均是 $(0, n)$ 所在的类.

(ii) $$u_{ijkr}(t) = \begin{cases} 1, \text{如}(i,j),(k,r)\text{属于同一类} I \in \mathscr{D}; \\ 0, \text{其他}. \end{cases}$$

$$\hat{u}_{ijkr}(s) = \begin{cases} 1, \text{如}(i,k),(j,r)\text{属于同一类} \hat{I} \in \hat{\mathscr{D}}; \\ 0, \text{其他}. \end{cases}$$

$u_{ijkr}(t) = u_{ijkr}$，$\hat{u}_{ijkr}(s) = \hat{u}_{ijkr}$ 与 $s,t > 0$ 无关，且 $u_{ijkr} = \hat{u}_{ijkr}$.

(iii) 对任意 $i,j,k,r \in E$，存在 $r' \in E$，使 $P_{ijkr}(s,t) = P_{000r'}(s,t)$.

(iv) $(i,j) \in I_n \Leftrightarrow (n,j) \in \hat{I}_i$. 这样，对 E 适当编号后，E^2 的分解成如下的形式：

$$\begin{pmatrix} I_0 & I_1 & I_2 & \cdots \\ (0,0) & (0,1) & (0,2) & \cdots \\ (1,1) & (1,r_{11}) & (1,r_{12}) & \cdots \\ (2,2) & (2,r_{21}) & (2,r_{22}) & \cdots \\ (3,3) & (3,r_{31}) & (3,r_{32}) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \hat{I}_0 & \hat{I}_1 & \hat{I}_2 & \cdots \\ (0,0) & (0,1) & (0,2) & \cdots \\ (1,1) & (1,\hat{r}_{11}) & (1,\hat{r}_{21}) & \cdots \\ (2,2) & (2,\hat{r}_{12}) & (2,\hat{r}_{22}) & \cdots \\ (3,3) & (3,\hat{r}_{13}) & (3,r_{23}) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right]. \tag{4.3}$$

证 (i) 由定理7.2，$\mathscr{P}$ 标准必可测，故由定理6.29得 (i) 的第一部份. 第二部份由定理 7.2(b) 得出.

先证 (iii). 对 i，j，k，$r\in E$，存在 a，$b\in E$，I_a，$I_b\in\mathscr{D}$，使 $(i,j)\in I_a,(k,r)\in I_b$，则

$$P_{ijkr}(s,t)=\pi_{I_aI_b}(s,t)=p_{a0b}(s,t). \tag{4.4}$$

对 a，$b\in E$，存在 $c\in E$，$\hat{I}_c\in\hat{\mathscr{D}}$，使 $(a,b)\in\hat{I}_c$，此时有

$$P_{0a0b}(s,t)=\hat{\pi}_{I_0I_c}(s,t)=P_{000c}(s,t). \tag{4.5}$$

故 $P_{ijkr}(s,t)=P_{000c}(s,t)$. 从而有由(4.4)、(4.5)，

$$\begin{aligned} u_{ijkr}&=\lim_{s\to 0+}P_{ijkr}(s,t)=\lim_{t\to 0+}P_{000c}(s,t)=\delta_{(0,0)(0,c)}\\ &=\lim_{t\to 0+}P_{000c}(s,t)=\hat{u}_{ijkr}. \end{aligned}$$

(ii) 的第一部份是显然的. 于是 (iii) (ii) 得证.

(iv) 设 $(i,j)\in I_k$. 由(ii)(iii) 知 $\hat{u}_{0i0j}=u_{0ki}=1$. 再由(ii) 知. $(0,i)$与(k,j)同属于某个$I\in\hat{\mathscr{D}}$. 但$(0,i)\in\hat{I}_i$. 故$(k,j)\in\hat{I}_i$. (iv) 的第一部份得证. 为证第二部份，只需证明：$\forall\ (i,j)\in I_0$ 或 $\hat{I}_0$，必有 $i=j$. 设$(i,j)\in I_0$，由第一部份结论有$(0,j)\in\hat{I}_i$，而$(0,i)\in\hat{I}_i$. 由定理 7.2(b)，必定 $i=j$. ∎

§7.2 参数对称型的若干结果

7.5定理 设 $\mathscr{P}$ 是可测三点转移函数族. 则 $\mathscr{P}$ 是参数对称型的充要条件是：对任意 s，$t>0$，

$$P(s,t)=P(1,st). \tag{5.1}$$

证 只需证必要性. 先证：对任意 s，$t>0$，$n\geqslant 1$有

$$P(ns,t)=P(s,nt). \tag{5.2}$$

$n=1$时上式成立．设n时上式成立．由水平转移性、参数对称型条件以及归纳假设（5.2），得

$$\begin{aligned} P_{ijkr}((n+1)s,t) &= \sum_g P_{ijlg}(ns,t)P_{lgkr}(s,t) \\ &= \sum_g P_{ijlg}(s,nt)P_{lgkr}(s,t) = \sum_g P_{ijlg}(nt,s)P_{lgkr}(t,s) \\ &= P_{ijkr}((n+1)t,s) = P_{ijkr}(s,(n+1)t). \end{aligned} \tag{5.3}$$

故（5.2）对所有$n\geqslant 1$成立．

从（5.2）得出：对$t>0$及有理数$r>0$有

$$P(r,t)=P(1,rt). \tag{5.4}$$

又因$P(\cdot,t)$和$P(1,\cdot)$在$(0,\infty)$上连续，故从(5.4)得(5.1)．∎

7.6定理 设$\mathscr{P}$是可测三点转移函数族．如果$\mathscr{P}$是状态对称型的，则$\mathscr{P}$是参数对称型的．

证 由定理7.5及其证明知，为证本定理，只需证（5.2）．

$n=1$时显然有（5.2）．设n时（5.2）成立．由水平转移性及归纳假设，（5.2）式，（5.3）中第1、2两个等号仍有效，然后由状态对称型和竖直转移性得

$$\begin{aligned} P_{ijkr}((n+1)s,t) &= \sum_g P_{iljg}(s,nt)P_{lkgr}(s,t) \\ &= P_{ikjr}(s,(n+1)t) = P_{ijkr}(s,(n+1)t), \end{aligned} \tag{6.1}$$

故（5.2）对所有$n\geqslant 1$成立． ∎

7.7定理 标准三点转移函数族$\mathscr{P}$是参数对称型的．

证 设$\mathscr{P}$标准．使用记号6.24（ii）和（iii）：$(i,j)\overline{\backsim}(k,r)$或$(i,k)\dot{\backsim}(j,r)$分别表示记号两端属于同一类$I\in\mathscr{D}$或$\dot{I}\in\hat{\mathscr{D}}$．

由定理7.4（ii）（iii）知

$$(i,j)\overline{\backsim}(k,r)\Leftrightarrow(i,k)\dot{\backsim}(j,r). \tag{7.1}$$

指定$a\in E$，引入E^2到E的映射φ和ψ：

$$(a,\varphi(k,r))\overline{\backsim}(k,r),(a,\psi(j,r))\dot{\backsim}(j,r) \tag{7.2}$$

则由定理7.3（i）及其相应的竖直情形知，截口映射$\varphi(k,\cdot),\psi(j,\cdot),\varphi(\cdot,r),\psi(\cdot,r)$都是$E$到$E$的一一映射．此外，由（7.1）（7.2）易得：

$$\varphi(\psi(g,r),r)=g,\quad g,r\in E. \tag{7.3}$$

往证：对任意 $r\in E$，s，$t>0$，$n\geqslant 1$，有

$$P_{aaar}(ns,t)=P_{aaar}(s,nt). \tag{7.4}$$

当 $n=1$时，上式成立．设 n 时上式成立．则

$$P_{aaar}((n+1)s,t)=\sum_{g}P_{aaag}(ns,t)P_{agar}(s,t)$$

$$=\sum_{g}P_{aaag}(s,nt)P_{agar}(s,t). \tag{7.5}$$

由（7.3）易知

$$P_{agar}(s,t)=P_{aaa\psi(g,r)}(s,t),P_{aaag}(s,t)=P_{aa\psi(g,r)r}(s,t).$$

而且当 g 遍历 E 时，$\psi(g,r)$ 也遍历 E，故由竖直转移性得

$$P_{aaar}((n+1)s,t)=\sum_{\psi(g,r)\in E}P_{aaa\psi(g,r)}(s,t)P_{aa\psi(g,r)r}(s,nt)$$

$$=P_{aaar}(s,(n+1)t),$$

故（7.4）对所有 $n\geqslant 1$成立．

由（7.1）（7.2），

$$P_{ijkr}(s,t)=P_{a\varphi(i,j)a\varphi(k,r)}(s,t)=P_{aaa\psi(\varphi(i,j),\varphi(k,r))}(s,t),$$

故由（7.5）知（5.1）成立． ∎

7.8系　设可测族 $\mathscr{D}$ 是参数对称型的．则

(i) 由（6.15.3）确定的$U(t)=U$ 与 $t>0$ 无关，竖直情形相应的 $\hat{U}(s)=\hat{U}$ 与 $s>0$ 无关，而且

$$U(t)=\hat{U}(s)=U=\hat{U}. \tag{8.1}$$

(ii)　$(i,j)\ \overline{\backsim}\ (k,r),(i,k)\in\hat{E}_{+}^{2}\Rightarrow(i,k)\ \hat{\backsim}\ (j,r).$ (8.2)

$(i,k)\ \hat{\backsim}\ (j,r),(i,j)\in E_{+}^{2}\Rightarrow(i,j)\ \overline{\backsim}\ (k,r).$ (8.3)

其中记号$\overline{\backsim}$和$\hat{\backsim}$，E_{+}^{2}和 $\hat{E}_{+}^{2}$均见记号6.24，它们分别与 t 和 s 无关．

证　(i) 由（5.1）立得．

(ii) 设 $(i,j),(k,r)\in M\in\mathscr{D}_{+}$，$(i,k)\in\hat{M}\in\hat{\mathscr{D}}_{+}$，$(j,r)\in\hat{N}\in\hat{\mathscr{D}}$．由定理 6.21 及竖直情形的相应结果有

$$P_{ijkr}(s,t)=\pi_{MM}(s,t)u_{kr}(t)=\pi_{\hat{M}\hat{N}}(s,t)\hat{u}_{jr}(s).$$

于是

$$u_{ijkr}(t)=1\cdot u_{kr}(t)>0,\ \hat{u}_{ijkr}(s)=[\lim_{t\to 0}\pi_{\hat{M}\hat{N}}(s,t)]\hat{u}_{jr}(s).$$

由（8.1）立得 $\hat{M}=\hat{N}$，故（8.2）得证．类似证（8.3）． ∎

系7.8的结论（i）（ii）远弱于标准性条件，但却能导出可测族 $\mathscr{D}$ 的许多深远而精细的结果．为方便计，我们引入

7.9定义 称可测族 $\mathscr{D}$ 是弱标准的，如果系7.8中的（i）（ii）成立．

7.10引理 设 $\mathscr{D}$ 是弱标准的．则

(i) $\forall\ k \in E_+, r \in E$ 有

$$(r,k) \in E_+^2 ; (r,k) \in \hat{E}_+^2. \tag{10.1}$$

(ii) $(i,j) \in I \subset E_+^2, I \in \mathscr{D}, (i,k) \in \hat{I} \subset \hat{E}_+^2, \hat{I} \in \hat{\mathscr{D}} \Rightarrow$ 截口 $I_k = \hat{I}_j \subset E_+$. 这里，

$$I_i = \{j:(i,j) \in I\}, \hat{I}_j = \{i:(i,j) \in \hat{I}\}. \tag{10.2}$$

(iii) $\forall\ j,k \in E_+, I \subset E_+^2, I \in \mathscr{D}, \hat{I} \subset \hat{E}_+^2, \hat{I} \in \hat{\mathscr{D}}$，则 $I_k = \hat{I}_j$ 或 $I_k \cap \hat{I}_j = \varnothing$.

(iv) $\forall\ j,k \in E_+, J, I \subset E_+^2, J, I \in \mathscr{D}$，则 $J_k = I_j$ 或 $J_k \cap I_j = \varnothing$.

(v) $\forall\ k \in E_+$，如 $(k,r) \in I \subset E_+^2, I \in \mathscr{D}, (r,k) \in L \in \mathscr{D}$，则 $I_k \subset L^k \equiv \{r \in E:(r,k) \in L\}$.

证 (i) 因 $(k,r) \overline{\backsim} (k,r)$，由假设 $k \in E_+$ 可得 $(k,k) \in \hat{E}_+^2$，由 (8.2) 知，$(r,r) \overline{\backsim} (k,k)$，由水平和竖直表现定理有

$$P_{rkrk}(s,t) = \pi_{MM}(s,t) u_{rk}(t) = \pi_{\hat{M}\hat{M}}(s,t) \hat{u}_{kk}(s).$$

其中 $(r,k) \in M, (r,r) \in \hat{M}$. 由上式及 $\hat{u}_{kk}(s) > 0$，知 $u_{rk}(t) > 0$. 所以 $(r,k) \in E_+^2$.

(ii) $\forall\ r \in I_k$，则 $r \in E_+$ 且 $(k,r) \in I \in \mathscr{D}$，故 $(i,j) \overline{\backsim} (k,r)$. 又 $(i,k) \in \hat{I} \subset \hat{E}_+^2, \hat{I} \in \hat{\mathscr{D}}$，由 (8.2) 知 $(j,r) \in \hat{I}$，故 $r \in \hat{I}_j \Rightarrow I_k \subset \hat{I}_j$. 由 (8.3) 同理得 $\hat{I}_j \subset I_k$，所以 $I_k = \hat{I}_j$.

(iii) 设 $I_k \cap \hat{I}_j \neq \varnothing$. 则存在 $r \in I_k \cap \hat{I}_j$，于是 $(k,r) \in I$，$(j,r) \in \hat{I}$. 由于 (iii) 的假设 $j,k \in E_+$，从 (i) 知存在 $L \subset E_+^2, L \in \mathscr{D}$，$\hat{L} \subset \hat{E}_+^2, \hat{L} \in \hat{\mathscr{D}}$，使 $(r,k) \in L, (r,j) \in \hat{L}$. 由 (ii) 知 $L_j = \hat{L}_k$. 今 $\forall\ i$

$\in \hat{L} - \hat{L}_k \subset I$. 则$(j,i) \in L$，$(k,i) \in \hat{L}$. 由于$(k,r) \in L$，$(j,r) \in L$，故由(8.2)(8.3)得$(i,j) \in I$，$(i,k) \in I$. 再由(ii)得$I_k = \hat{I}_j$.

(iv) 设$J_k \cap I_j \neq \varnothing$，则存在$r \in J_k \cap I_j$，于是$(k,r) \in J$，$(j,r) \in I$. 但$(r,r) \in E_+^2$，故存在$\hat{I} \subset \hat{E}_+^2$，$\hat{I} \in \hat{\mathscr{C}}$，使$(r,r) \in \hat{I}$. 由(iii)知$J_k = \hat{I}_r$，$I_j = \hat{I}_r$，于是$J_k = I_j$.

(v) $\forall g \in I_r$，则$(k,r) \overline{\backsim} (k,g)$且$(k,k) \in E_+^2$. 由(8.2)得$(k,k) \backsim (k,g) \Rightarrow (r,g) \backsim (k,k)$. 又$(r,k) \in E_+^2$，由(8.3)得$(r,k) \backsim (g,k) \Rightarrow (g,k) \in L \Rightarrow g \in L^k \Rightarrow I_k \subset L^k$. ■

7.11引理 设 $\mathscr{C}$ 是弱标准的. 设 $E_+ = \{0,1,2,\cdots\}$. 令

$r_1 = \inf E_+$，$E_1 = \{r \in E_+ : (r_1, r) \overline{\backsim} (r_1, r_1)\}$，

$r_2 = \inf(E_+ - E_1)$，$E_2 = \{r \in E_+ : (r_2, r) \overline{\backsim} (r_2, r_2)\}$，

......

$r_{n+1} = \inf(E_+ - \bigcup_{k=1}^{n} E_k)$，$E_{n+1} = \{r \in E_+ : (r_{n+1}, r) \overline{\backsim} (r_{n+1}, r_{n+1})\}$.

则 (i) $E_+ = \bigcup_n E_n$

(ii) $\forall n \geqslant 1$，存在$N \subset E_+^2$，$N \in \mathscr{C}$，使$E_n^2 = E_n \times E_n \subset N$.

(iii) $\forall m,n \geqslant 1$，或者存在$N \subset E_+^2$，$N \in \mathscr{C}$，使$E_m \times E_n \subset N$；或者$E_m \times E_n \subset E_0^2$.

(iv) $\forall m,n \geqslant 1$，或者存在$\hat{N} \subset \hat{E}_+^2$，使$E_m \times E_n \subset \hat{N}$，或者$E_m \times E_n \subset \hat{E}_0$.

证 (i) $\forall r \in E_+$，由于$r_n \uparrow \infty$，故必有$n_0 \geqslant 1$，使$r_{n_0} \leqslant r < r_{n_0+1}$. 谬设$r \notin \bigcup_{k=1}^{n_0} E_k$，则$r \in E_+ - \bigcup_{k=1}^{n_0} E_k$，从而$r \geqslant \inf(E_+ - \bigcup_{k=1}^{n_0} E_k) = r_{n_0+1}$，矛盾. 故(i)得证.

(ii) 因$r_n \in E_+$，故存在$N \subset E_+^2$，$N \in \mathscr{C}$，使$(r_n, r_n) \in N$. 由E_n的定义知$\{r_n\} \times E_n \subset N$，故$E_n = N_{r_n}$. 由引理7.10(v)得$E_n \times E_n \subset N$.

(iii) 设$E_m \times E_n \subset E_0^2$不成立. 则存在$i \in E_m$，$j \in E_n$及$N \subset$

E^2_+, $N\in\mathscr{G}$，使$(i,j)\in N$. 由(ii)知，存在$M\subset E^2_+$, $M\in\mathscr{D}$，使$E^2_n\subset M$. 因此，$(j,j)\in M$. 由引理 7.10(v) 得$N_j=M_j=E_n$. 又由引理 7.10(i) 知，存在$L\subset E^2_+$, $L\in\mathscr{G}$，使$(j,i)\in L$. 由引理 7.10(vi) 得$L_j\subset N^i$. 但$L_j=E_m$(仿上面考虑E_m，同理所得)，故$N^i\supset E_m$. 但由$N_i=E_n$知对任意$j\in E_n$，都有$N^j\supset E_m$，故$E_m\times E_n\subset N$.

(iv) 设$E_m\times E_n\subset\hat{E}^2_+$不成立. 则存在$i\in E_m$, $j\in E_n$, $\hat{N}\subset\hat{E}^2_+$, $\hat{N}\in\hat{\mathscr{G}}$，使$(i,j)\in\hat{N}$. 于是由(8.3)得$(i,j)\backsim(k,r)$，即$E_m\times E_n\subset\hat{N}$. ∎

设r_1, r_2, …由引理7.11确定. 设$(r_1,r_1)\in M\cap\hat{M}$, $M\in\mathscr{D}$, $\hat{M}\in\hat{\mathscr{D}}$，则$M\subset E^2_+$, $\hat{M}\subset\hat{E}^2_+$，且$M$、$\hat{M}$由$r_1$唯一决定. 令

$$\bar{E}=\{r_1,r_2,\cdots\}\subset E_+,$$

$$E^*=\{r\in\bar{E}:(r,r)\in M\cap\hat{M}\}\neq\varnothing, \tag{11.1}$$

$$P^*_{i^*j^*k^*r^*}(s,t)=\sum_{r\in M_{r^*}}P_{i^*j^*k^*r}(s,t), \tag{11.2}$$

$$P^*(s,t)=\{P^*_{i^*j^*k^*r^*}(s,t);i^*,j^*,k^*,r^*\in E^*\}, \tag{11.3}$$

$$\mathscr{P}^*=\{P^*(s,t),s,t>0\}. \tag{11.4}$$

其中M_{r^*}是M的r^*截口，见 (10.3).

7.12定理 设$\mathscr{P}$是弱标准的. 则$\mathscr{P}^*$是标准的三点转移函数族，因而是参数对称的.

证 分几步证明.

(i) 对任意$i^*,j^*,k^*,r^*\in E^*$，由于$(r^*,r^*)\in M\cap\hat{M}$，故由引理 7.10(iii) 得$M_{r^*}=\hat{M}_{r^*}$，从而

$$P^*_{i^*j^*k^*r^*}(s,t)=\sum_{r\in M_{r^*}}P_{i^*j^*k^*r}(s,t)=\sum_{r\in\hat{M}_{r^*}}P_{i^*j^*k^*r}(s,t). \tag{12.1}$$

(ii) 对任意$i^*,j^*,k^*\in E^*$, $r_0\in\bar{E}$. 如存在$r\in E_n$使$P_{i^*j^*k^*r}(s,t)>0$，则$r_0\in E^*$.

事实上，由表现定理6.21，

$$P_{i^*j^*k^*r}(s,t) = \pi_{IJ}(s,t)u_{k^*r}(t) = \pi_{IJ}(s,t)\hat{u}_{j^*r}(s). \tag{12.2}$$

其中 $(i^*,j^*)\in I,(k^*,r)\in J,(i^*,k^*)\in \hat{I},(j^*,r)\in\hat{J}$. 于是 $u_{k^*r}(t)>0,\hat{u}_{j^*r}(s)>0$. 即$(k^*,r)\in E_+^2,(j^*,r)\in\hat{E}_+^2$. 由于$(k^*,k^*)\in\hat{E}_+^2,(j^*,j^*)\in E_+^2$,故由(8.2)(8.3)得$(k^*,k^*)\backsim(r,r)$,$(j^*,j^*)\overline{\backsim}(r,r)$. 但$(r,r)\overline{\backsim}(r_n,r_n),(r,r)\backsim(r_n,r_n)$,故得$(k^*,k^*)\backsim(r_n,r_n),(j^*,j^*)\overline{\backsim}(r_n,r_n)$. 由(11.1)知$(r_n,r_n)\in M\cap\hat{M}$,从而 $r_n\in E^*$.

(iii) 对任意$i^*,j^*\in E^*$,则$(i^*,i^*)\backsim(j^*,j^*)$. 故$(i^*,j^*)\in E_+^2$. 同理证$(i^*,j^*)\in\hat{E}_+^2$.

(iv) 对任意 $i^*,j^*,k^*,r^*\in E^*,j\in M_{j^*},r\in M_{r^*}$,则

$$P_{i^*jk^*r}(s,t) = P_{i^*j^*k^*r}(s,t). \tag{12.3}$$

事实上,由于$(i^*,i^*),(j^*,j)\in\hat{M}$,由(iii)和(8.3)知,$(i^*,j^*)\overline{\backsim}(i^*,j)$. 由表现定理 6.21,

$$P_{i^*jk^*r}(s,t) = \pi_{IN}(s,t)u_{k^*r}(t). \tag{12.4}$$

$$P_{i^*j^*k^*r}(s,t) = \pi_{IN}(s,t)u_{k^*r}(t), \tag{12,5}$$

其中,$(i^*,j^*),(i^*,j)\in I,(k^*,r)\in N$. (12.3)

得证.

同理可证更一般的结论

$$P_{i^*jkr}(s,t) = P_{i^*j^*k^*r}(s,t). \tag{12.6}$$

其中 $j\in M_{j^*}$, $k\in M_{k^*}$, $r\in M_{r^*}$.

现在往证 $\mathscr{P}^*$ 是三点转移函数族,即证定义6.1 (A) (B) (C) (D). 非负性 (A) 平凡.

(B) 由 (ii) 得

$$\begin{aligned}\sum_{r^*\in E^*}P_{i^*j^*k^*r^*}(s,t) - \sum_{r^*\in E}\ \sum_{r\in M_{r^*}}P_{i^*j^*k^*r}(s,t)\\ = \sum_{r_n\in E}\ \sum_{r\in M_{r_n}}P_{i^*j^*k^*r}(s,t)\\ = \sum_{r\in E_+}P_{i^*j^*k^*r}(s,t)\end{aligned}$$

$$= \sum_{r \in E} P_{i^* j^* k^* r}(s,t) = 1.$$

(C) 对任意 $l^* \in E^*$,

$$P^*_{i^* j^* k^* r^*}(s+h,t) = \sum_{r \in M_{r^*}} P_{i^* j^* k^* r}(s+h,t)$$

$$= \sum_{r \in M_{r^*}} \sum_{g \in E} P_{i^* j^* l^* g}(s,t) P_{l^* g k^* r}(h,t)$$

$$= \sum_{r \in M_{r^*}} \sum_{g^* \in E^*} \sum_{g \in M_{g^*}} P_{i^* j^* l^* g}(s,t) P_{l^* g k^* l}(h,t)$$

$$= \sum_{r \in M_{r^*}} \sum_{g^* \in E^*} \sum_{g \in M_{g^*}} P_{i^* j^* l^* g}(s,t) P_{l^* g^* k^* r}(h,t)$$

$$= \sum_{g^* \in E} P^*_{i^* j^* l^* g^*}(s,t) P^*_{l^* g^* k^* r^*}(h,t).$$

同理可证 (D).

因 $\mathscr{P}$ 可测，故 $\mathscr{P}^*$ 也可测. 往证 $\mathscr{P}^*$ 标准.

由表现定理6.21,

$$P_{i^* j^* k^* r}(s,t) = \pi_{M^* N^*}(s,t) u_{k^* r}(t). \tag{12.7}$$

其中, $(i^*, j^*) \in M^* \in \mathscr{D}$, $(k^*, r) \in N^* \in \mathscr{D}$, 故由定理6.21(iii)、引理7.10(v)和 $M_{r^*} = N_{k^*}$ 得

$$P^*_{i^* j^* i^* j^*}(s,t) = \pi_{M^* N^*}(s,t). \tag{12.8}$$

特别地

$$P^*_{i^* j^* i^* j^*}(s,t) = \pi_{M^* N^*}(s,t), \tag{12.9}$$

从而

$$u^*_{i^* j^* i^* j^*}(t) = \lim_{s \to 0} P^*_{i^* j^* i^* j^*}(s,t) \equiv 1.$$

同理可得 $\mathscr{P}^*$ 的竖直标准性，从而 $\mathscr{P}^*$ 标准. ∎

7.13定理 设 $\mathscr{P}$ 是可测三点转移函数族. 则 $\mathscr{P}$ 是参数对称型的充要条件是：对任意 $s, t>0$, 近极限 $U(t)$、$\hat{U}(s)$ 分别地与 t, s 无关:

$$U(t) = \hat{U}(s) = U = \hat{U}. \tag{13.1}$$

证 必要性已在系7.8中证明. 往证充分性.

由定理6.15 (a) (b) (c)、定理6.16 (a) (b) (c) 知, U 是常值型的三点转移函数族. 由定理6.23, 存在常数 $0 \leqslant a \leqslant 1$, 使

$\sum_{r} u_{ijkr} \equiv a.$

(i) 如 $a<1$，则由定理6.21 (ii) 知，$\mathscr{D}_{+}=\varnothing$，从而由定理6.21(iv) 有 $P_{ijkr}(s,t)=0$，$s,t>0$. 此时，显然 $\mathscr{P}$ 是参数对称型的.

(ii) 设 $a=1$. 则定理 6.15(f) 中恒取等号. 由系7.8的证明知，$\mathscr{P}$ 是弱标准的，故记号 (11.1) 有意义. 取 $i^*\in E^*$，则

$$P_{ijkr}(s,t)=\sum_{g} u_{iji^*g} P_{i^*gkr}(s,t). \tag{13.2}$$

又由定理 6.15(e) 和定理 6.16(e) 得

$$P_{i^*gkr}(s,t)=\sum_{a,b} P_{i^*i^*i^*b}(s,t)\,u_{i^*gba}u_{i^*akr}. \tag{13.3}$$

于是，对一切 i、j、k、$r\in E$，$i^*\in E^*$、s、$t>0$，有

$$P_{ijkr}(s,t)=\sum_{g,a,b} u_{iji^*g} P_{i^*i^*i^*b}(s,t)\,u_{i^*gba}u_{i^*akr}. \tag{13.4}$$

由定理7.12证明中的 (ii) 知，$P_{i^*i^*i^*b}$ $(s,\ t)$ $>0\Rightarrow b\in M_{\bar b}$对某 $\bar b\in E^*$. 又由定理7.12及 (12.7) (12.9) (13.1) 知，$\forall\, i^*$，j^*，k^*，$r^*\in E^*$，$r\in M_{r^*}$，都有 $P_{i^*j^*k^*r}(s,t)=P_{i^*j^*k^*r}(t,s)$. 特别地，$\forall\, i^*\in E^*$，$b^*\in E^*$，$b\in M_{b^*}$有

$$P_{i^*i^*i^*b}(s,t)=P_{i^*i^*i^*b}(t,s).$$

于是，由 (13.4) 知，对任意 i，j，k，$r\in E$，s，$t>0$有 $P_{ijkr}(s,t)=P_{ijkr}(t,s)$. ∎

由于标准族 $\mathscr{P}$ 是参数对称型的，对于 $\mathscr{P}$ 的远极限，我们有

定理7.14 设 $\mathscr{P}$ 是标准三点转移函数族，$v_{ijkr}(t)$ 和 $\hat{v}_{ijkr}(s)$ 为水平远极限和竖直远极限. 则

$$v_{ijkr}(t)=\hat{v}_{ijkr}(s)=v_{ijkr}(1),\ s,t>0. \tag{14.1}$$

$$\lim_{\substack{s\to\infty\\ t\to\infty}} P_{ijkr}(s,t)=v_{ijkr}(1). \tag{14.2}$$

证 利用 (5.1)，对 $t>0$，

$v_{ijkr}(t)=\lim\limits_{s\to+\infty} P_{ijkr}(s,t)=\lim\limits_{s\to+\infty} P_{ijkr}(st,1)=v_{ijkr}(1)$，同理可证其余. ∎

§ 7.3 在坐标轴上的扩充

7.15定理 设 $\mathscr{P}=\{P(s,t),(s,t)\in R_+^2-\lambda_0\}$ 水平标准，$u_{ijkr}(t)(t>0)$ 是水平近极限. 补充定义

$$P_{ijkr}(0,t)=u_{ijkr}(t),t>0. \tag{15.1}$$

则对固定 $t>0$：

(i) 对 $s\geqslant 0$一致地有

$$|P_{ijkr}(s+h,t)-P_{ijkr}(s,t)|\leqslant 1-P_{ikik}(h,t),h>0, \tag{15.2}$$

从而 $P_{ijkr}(s,t)$ 在 $s\geqslant 0$ 上一致连续.

(ii) 对 $s\in[0,M]$(M 为任意正数) 一致地有

$$\lim_{h\to 0}\sum_r|P_{ijkr}(s+h,t)-P_{ijkr}(s,t)|=0. \tag{15.3}$$

证 (i) 注意：从定理 6.15(e) 和(15.1) 看出，定义6.1(C) 水平转移性中对 $s'=0$也成立. 象推导 (2.1) 一样，(15.2) 对 $s\geqslant 0$成立.

(ii) 由定理 6.18，$\sum_r P_{ijkr}(s,t)$ 在 $s\in[0,M]$ 一致收敛于 1. $\forall\ \varepsilon>0$,存在有穷子集E^*,使$\Delta(s)=\sum_{r\in E-E^*}P_{ijkr}(s,t)<\varepsilon/4$对$s\in[0,M]$一致地成立. 由 E^* 有穷和(i),存在$\delta>0$使当$0\leqslant h<\delta$时,对 $r\in E^*$ 和 $s\in[0,M]$ 一致地有

$$\Delta_r(s)\equiv|P_{ijkr}(s+h,t)-P_{ijkr}(s,t)|<\frac{\varepsilon}{2N},$$

其中 N 是 E^*的元素个数. 从而对上述的$0\leqslant h<\delta$，对$s\in[0,M]$一致地有

$$\sum_r|P_{ijkr}(s+h,t)-P_{ijkr}(s,t)|\leqslant\sum_{r\in E^*}\Delta_r(s)+\Delta(s+h)$$

$$+\Delta(s)<N\cdot\frac{\varepsilon}{2N}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon. \quad \blacksquare$$

7.16定理 设 $\mathscr{P}=\{P(s,t),(s,t)\in R_+^2-\lambda_0\}$ 是标准三点转移函数族，$\mathscr{P}$ 的近极限 U 如(8.1). 补充定义：

$$P_{ijkr}(0,t)=P_{ijkr}(s,0)=u_{ijkr},$$

则 $P_{ijkr}(s,t)$ 在$(s,t)\in[a,\infty)\times[a,\infty)$ 上一致连续,其中 a 为任意正数. 级数 $\sum_r P_{ijkr}(s,t)$ 在$(s,t)\in[0,M_1]\times[0,M_2]$中一致收敛于 1,其中 M_1,M_2 为任意正数.

证 应用(5.1)和定理 6.15(iii)、定理 6.18 第二结论. ∎

§7.4 偏导数的存在性和四个偏微分方程组

利用关系定理和单参数马氏链的有关结论,下面的定理是明显的.

7.17定理 设 $\mathscr{P}$ 可测,水平标准,固定 $t>0$,则 $\frac{\partial P_{ijkr}(s,t)}{\partial s}$ 在 $s\in(0,\infty)$ 存在、有穷、连续,且对 s_1,$s_2>0$,有

$$\frac{\partial P_{ijkr}(s_1+s_2,t)}{\partial s}=\sum_g\frac{\partial P_{ij\xi g}(s_1,t)}{\partial s}P_{\xi gkr}(s_2,t),\text{对一切 }\xi\in E.$$

7.18定理 设 $\mathscr{P}$ 可测,水平标准,固定 $t>0$,i,j,k,$r\in E$,极限

$$\frac{\partial P_{ijkr}(0,t)}{\partial s}\equiv\lim_{s\to0+}\frac{P_{ijkr}(s,t)-u_{ijkr}}{s}=q_{ijkr}(t),\tag{18.1}$$

存在. 对固定的 $i,j,k\in E$,存在唯一的 $r_0\in E$(按定理7.3(i)的记号,$r_0=f_{ik}(j)$)使 $u_{ijkr_0}=1$,且满足:

(i) $-\infty\leqslant q_{ijkr_0}(t)\leqslant0$.

(ii) $0\leqslant q_{ijkr}(t)<+\infty$,如 $r\neq r_0$.

(iii) $\sum_{r\neq r_0}q_{ijkr}(t)\leqslant-q_{ijkr_0}(t)$.

7.19定理 设 $\mathscr{P}$ 可测,水平标准. 则对 s,$t>0$,有

(i) $\frac{\partial P_{ijkr}(s,t)}{\partial s}\geqslant\sum_g q_{ij\xi g}(t)P_{\xi gkr}(s,t),\forall\,\xi\in E$.

(ii) $\frac{\partial P_{ijkr}(s,t)}{\partial s}\geqslant\sum_g P_{ij\xi g}(s,t)q_{\xi gkr}(t),\forall\,\xi\in E$.

7.20定理 设 $\mathscr{P}$ 可测,竖直标准. 则对 s,$t>0$有

(i) $\dfrac{\partial P_{ijkr}(s,t)}{\partial t} \geqslant \sum\limits_{g} \hat{q}_{i\xi kg}(s) P_{\xi jgr}(s,t), \forall \xi \in E.$

(ii) $\dfrac{\partial P_{ijkr}(s,t)}{\partial t} \geqslant \sum\limits_{g} P_{i\xi kg}(s,t) \hat{q}_{\xi jgr}(s), \forall \xi \in E.$

其中

$$\frac{\partial P_{ijkr}(s,0)}{\partial t} = \lim_{t\to 0} \frac{P_{ijkr}(s,t) - \hat{u}_{ijkr}}{t} = \hat{q}_{ijkr}(s). \qquad (20.1)$$

7.21定义 定理7.19（i）（ii）、定理7.20（i）(ii）中的不等式组，分别称为向右、向左、向上、向下不等式组．当它们取等号时，分别称为向右、向左、向上、向下（偏微分）方程组．

7.22定义 由（18.1）确定的族 $\overline{Q} = \{q_{ijkr}(t): i,j,k,r \in E, t > 0\}$ 称为 $\mathscr{P}$ 的水平 Q 族．由（19.1）确定的族 $\hat{Q} = \{\hat{q}_{ijkr}(s): i, j,k,r \in E, s > 0\}$ 称为 $\mathscr{P}$ 的竖直 Q 族．称 $Q = \{\overline{Q}, \hat{Q}\}$ 为 $\mathscr{P}$ 的全 Q 族．如果 $\overline{Q}$ 的元均有限且 $\sum\limits_{r} q_{ijkr}(t) = 0 (t > 0, i,j,k \in E)$，称 Q 水平保守的．类似定义 Q 竖直保守．如 Q 既水平保守又竖直保守，称 Q 保守．

7.23定理 设 $\mathscr{P}$ 是标准三点转移函数族．则

(i) Q 水平保守 $\Longleftrightarrow$ 向右方程组成立．

(ii) Q 竖直保守 $\Longleftrightarrow$ 向上方程组成立．

(iii) Q 保守 $\Longleftrightarrow$ 向右、向上方程组成立．

由于标准族 $\mathscr{P}$ 是参数对称型的，下面的定理易证．

7.24定理 设 $\mathscr{P}$ 是标准族．则对 s，$t > 0$，

$q_{ijkr}(t) = q_{ijkr}(1)t$，$\hat{q}_{ijkr}(s) = \hat{q}_{ijkr}(1)s$，

$q_{ijkr}(1) = \hat{q}_{ijkr}(1)$．

7.25系 设 $\mathscr{P}$ 是标准族，固定 i，j，k，$r \in E$，则在 $t,s \in (0,\infty)$ 上，或者 $q_{ijkr}(t)$，$\hat{q}_{ijkr}(s)$ 同时恒等于 $-\infty$；或同时恒等于 0；或同时非零有限，且 $\dfrac{q_{ijkr}(t)}{\hat{q}_{ijkr}(s)} = \dfrac{t}{s}$．

7.26系 $Q = (\overline{Q}, \hat{Q})$ 保守 $\Longleftrightarrow$ 对任意 i，j，k，$r \in E$，$\sum\limits_{r} q_{ijkr}(1) = 0$．

7.27定理 设 $\mathscr{P}$ 是标准族．则对 s，$t > 0$，

$$q_{ijk}(s,t) = q_{ik}(t,s), \quad s q_{ijk}(s,t) = t\hat{q}_{ijk}(s,t),$$

其中 $q_{ijk}(s,t) = \frac{\partial P_{ijk}(s,t)}{\partial s}$, $\hat{q}_{ijk}(s,t) = \frac{\partial P_{ijk}(s,t)}{\partial t}$ 总是存在的.

7. 28定理 设 $\mathscr{P}$ 是标准族. 如 $\sup_i q_i(t) = q < \infty$, 则 $\mathscr{P}$ 的 Q 族是保守的, 且向右、向上、向左、向下方程组均成立. 具有此 Q 族的标准族 $\mathscr{P}$ 是唯一的.

第4篇

几类重要的两参数马尔可夫过程

8 两参数随机游动

§8.1 多参数随机游动的定义

本章中，设 E 是一切整数的集合，T_+ 为非负整数集，N 为正整数集. 对 $a,d\in N$，$E^d=E\times\cdots\times E$ 为 d 维整数格点集，类似定义 T_+^a，N^a. E^d 和 T_+^a 的原点都简记为 0，第 k 个坐标轴上的单位点 $\varepsilon_k=(\delta_{kj},1\leqslant j\leqslant a)\in T_+^a$，其中 δ_{kj} 为 Kronecker 记号. $\lambda^k=\{n\varepsilon_k:n\in T_+\}$，$\lambda_N^k=\{n\varepsilon_k:n\in N\}$，$1\leqslant k\leqslant a$. $\lambda^*=\bigcup_{k=1}^{a}\lambda^k$，$\lambda_N^*=\bigcup_{k=1}^{a}\lambda_N^k$.

8.1 定义 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是概率空间. $Y=\{Y(z),z\in T_+^a\}$ 是取值于 E^d 的随机变量族. 称 Y 为生成族，如果它满足下面的 (i)(ii)(iii)：

(i) $Y_N=\{Y(z),z\in N^a\}$ 是独立同分布随机变量族，记公共分布为 $\pi=\{\pi(i),i\in E^d\}$.

(ii) 记 $Y^*=\{Y(z),z\in\lambda^*\}$. 则 Y^* 与 Y_N 独立.

(iii) 记 $Y_N^K=\{Y(z),z\in\lambda_N^K\}$，$1\leqslant k\leqslant a$. 则 $Y_N^1,Y_N^2,\cdots,Y_N^a$ 相互独立.

8.2 定义 设 Y 是生成族. 令

$$X(z)=\sum_{l\in[0,z]}Y(l),\quad z\in T_+^a,\tag{2.1}$$

称 $X=\{X(z),z\in T_+^a\}$ 为 a 参数 d 维随机游动，记为 RW_a^d. 当强调 Y_N 的公共分布 π 时，记为 $RW_a^d(\pi)$.

当 Y^* 是零族时，称 RW_a^d 为零初值的. 当 Y^* 是独立族时，称 RW_a^d 为独立和初值的. 当 Y^* 是独立同分布族，且其公共分布就是

Y_N 的共同分布 π 时，称 RW_a^d 为独立同分布 π 的和初值的，简记为 $II\text{-}RW_a^d$. 当轴上的过程 $X_k^0 = \{X(n\varepsilon_k), n \in T_+\}$, $1 \leqslant k \leqslant a$，均是单参数马氏链时，称 RW_a^d 为马氏初值的.

显然，零初值的 RW_a^d、$II\text{-}RW_a^d$ 都是独立和初值的 RW_a^d，而独立和初值的 RW_a^d 是马氏初值的.

设 X 为 $RW_a^d(\pi)$，则

$$X(z) = S(z) + X(0) + \sum_{k=1}^{a} X(z_k\varepsilon_k), z \in T_+^a, \quad (2.2)$$

其中，$S = \{S(z), z \in T_+^a\}$ 是零初值的 $RW_a^d(\pi)$, $z = (z_1, \cdots, z_a)$，且 S 与 $X(0)$、诸过程 $X_k^0 = \{X(n\varepsilon_k), n \in N\}$, $1 \leqslant k \leqslant a$，相互独立.

我们主要研究 a＝2，d＝1 的情形 RW_2，并对 $T_+^2 = Z_+^2$ 引用 §1.1 中的记号.

设 $X = \{X(m,n), (m,n) \in T_+^2\}$ 为 RW_2. 记其截口过程 X_n^1 和 X_m^2：

$$X_n^1 = \{X_n^1(m), m \in T_+\}, X_m^2 = \{X_m^2(n), n \in T_+\},$$
$$(2.3)$$

其中 $X_n^1(m) = X_m^2(n) = X(m,n)$. 对马氏初值的 RW_2，虽然 X_0^1 和 X_0^2 均是单参数马氏链，但对 $m, n \in N$，X_n^1 和 X_m^2 却未必是单参数马氏链. 然而，对独立和初值的 RW_2，截口过程作为独立随机变量的和，是单参数马氏链.

记 $B = B(p,q) = \{B(i), i \in E\}$ 为贝努利分布，即 $B(-1) = q$, $B(1) = p$, $0 < p < 1$, $p + q = 1$. 记 $S = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 为对称贝努利分布. 记以 $\mu > 0$ 为参数的 Poisson 分布为 $P_\mu = \{P_\mu(i), i \in E\}$，其中 $P_\mu(i) = e^{-\mu}\frac{\mu^i}{i!}$, $i \geqslant 0$.

分别地称 $RW_a(B)$, $RW_a(S)$, $RW_a(P_\mu)$ 为 a 参数简单随机游动，a 参数对称随机游动，a 参数 Poisson 随机游动.

8.3 定理 设 X 是 $II\text{-}RW_2(B)$，则存在不依赖于 (m,n)、但依赖于 p 的常数 $A > 0$，使对任意 m，$n \geqslant 1$，$\varepsilon > 0$，有

$$P\left\{\left|\frac{X(m-1,n-1)}{mn}-(2p-1)\right|\geqslant\varepsilon\right\}\leqslant 2e^{-A\varepsilon^2mn}.$$

(3.1)

如果 X 是零初值的 $RW_2(B)$．上式中用 $X(m,n)$ 代替 $X(m-1,n-1)$ 也成立.

证 记 $H(m,n)=\dfrac{X(m-1,n-1)}{mn}-(2p-1)$. 为证 $P\{|H(m,n)|\geqslant\varepsilon\}\leqslant 2e^{-A\varepsilon^2mn}$，只需证 $P\{H(m,n)\geqslant\varepsilon\}\leqslant e^{-A\varepsilon^2mn}$ 和 $P\{-H(m,n)\geqslant\varepsilon\}\leqslant e^{-A\varepsilon^2mn}$. 我们只证前者，后者类似.

对任意 $t>0$，有

$$\begin{aligned}e^{-t\varepsilon}E\{e^{tH(m,n)}\}&\geqslant e^{-t\varepsilon}\int_{\{H(m,n)\geqslant\varepsilon\}}e^{tH(m,n)}dP\\&\geqslant e^{-t\varepsilon}\cdot e^{t\varepsilon}P\{H(m,n)\geqslant\varepsilon\}=P\{H(m,n)\geqslant\varepsilon\}.\end{aligned}$$

(3.2)

由于 X 是 H-$RW_2(B)$，故

$$\begin{aligned}&E\{e^{tH(m,n)}\}\\&=E\left\{\exp\left[\frac{t}{mn}\sum_{a=0}^{m-1}\sum_{b=0}^{n-1}(Y(a,b)-(2p-1))\right]\right\}\\&=\prod_{a=0}^{m-1}\prod_{b=0}^{n-1}E\left\{\exp\left[\frac{t}{mn}(Y(a,b)-(2p-1))\right]\right\}\\&=\left[pe^{\frac{2t}{mn}(1-p)}+(1-p)e^{-\frac{2t}{mn}p}\right]^{mn}\\&=\left[f\left(\frac{2t}{mn}\right)\right]^{mn}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

其中

$$f(x)=pe^{x(1-p)}+(1-p)e^{-xp}.\tag{3.4}$$

易验证：$f(0)=1,f'(0)=0,f''(0)>0$．在 $x=0$ 处对 $f(x)$ 作台劳展开．易知存在两个依赖于 p 的正常数 k_1，k_2，使当 $|x|\leqslant k_2$ 时有

$$f(x)\leqslant 1+k_1x^2\leqslant e^{k_1x^2}.\tag{3.5}$$

这样，我们有

$$P\{H(m,n)\geqslant\varepsilon\}\leqslant e^{-t\varepsilon}\left[f\left(\frac{2t}{mn}\right)\right]^{mn}\leqslant e^{-t\varepsilon+4k_1t^2/mn}.$$

但要求 $0<2t\leqslant mnk_2$. 取 $t=mnc$，则 $c>0$，且

$$P\{H(m,n)\geqslant\varepsilon\}\leqslant e^{-mn(c\varepsilon-4k_1c^2)}.$$

但要求 $0<2c\varepsilon\leqslant k_2$.

由于 $t>0$ 任意，于是可以选取与 (m,n) 无关而与 p 有关的充分小的 $c>0$，使 $2c\varepsilon\leqslant k_2$，且 $c-4k_1c^2>0$. 令 $A=c-4k_1c^2$ 即可. ∎

§8.2 RW_2 的各种两参数马氏性

8.4 定理 RW_2 具有宽过去马氏性. 即对 $(m,n)\in T_+^2$，$(a,b)\in N^2$，$r\in E$，有

$$\begin{aligned}&P\{X(m+a,n+b)=r\mid\mathscr{F}_{mn}^*\}\\&=P\{X(m+a,n+b)\\&=r\mid X(m,n),X(m,n+b),X(m+a,n)\}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

其中 $\mathscr{F}_{mn}^*=\sigma\{X(z),z\in R_{mn}^*\}$.

证 简记

$$\mathscr{A}_{mn}=\sigma\{X(m,n),X(m,n+b),X(m+a,n)\},\tag{4.2}$$

$$A_{mn}=\{z\in T_+^2:(m,n)<z\leqslant(m+a,n+b)\},\tag{4.3}$$

则有

$$X(m+a,n+b)=X(m,n+b)+X(m+a,n)-X(m,n)+X(A_{mn}).\tag{4.4}$$

依 $\mathscr{A}_{mn}$ 和 $\mathscr{F}_{mn}^*$ 的定义，$\Delta_1=X(m,n+b)+X(m+a,n)-X(m,n)$ 是 $\mathscr{A}_{mn}$ 可测的，也是 $\mathscr{F}_{mn}^*$ 可测的. 由于 Y 是生成族，$\Delta_2=X(A_{mn})$ 与 $\mathscr{A}_{mn}$ 独立，也与 $\mathscr{F}_{mn}^*$ 独立. 于是

$$\begin{aligned}&P\{X(m+a,n+b)=r\mid\mathscr{A}_{mn}\}\\&=\sum_{i+j=r}P\{\Delta_1=i,\Delta_2=j\mid\mathscr{A}_{mn}\}\\&=\sum_{i+j=r}I_{(\Delta_1=i)}P(\Delta_2=j).\end{aligned}$$

I 表示示性函数．由于同样的理由，上式中用 $\mathscr{F}^*_{mn}$ 代替 $\mathscr{A}_{mn}$ 也成立，故得（4.1）． ∎

8.5 定理 独立和初值的 RW_2 有 * 马氏性，i 马氏性（$i=1$，2），宽将来马氏性和单点马氏性

证 定理 8.4 已证明有独立和初值的 RW_2 具有宽过去马氏性，而对有独立和初值的 RW_2，其截口过程 X^1_n 和 X^2_m 均是单参数马氏链．依（4.4），RW_2 是 A 过程．依定理 3.44，X 有 * 马氏性，从而 X 有 i 马氏性（$i=1$，2），宽将来马氏性和单点马氏性． ∎

8.6 定理 RW_2 有强马氏性．即对任意有限值停点（σ，τ），$r\in E$ 及 $(a,b)\in T^2_+$，有

$$
\begin{aligned}
P\{X(\sigma+a,\tau+b)=r|\mathscr{F}^*_{\sigma\tau}\}
&=P\{X(\sigma+a,\tau+b)\\
&=r|X(\sigma,\tau),X(\sigma,\tau+b),\\
&\qquad X(\sigma+a,\tau+b)\}. \qquad (6.1)
\end{aligned}
$$

证 记（6.1）右方的条件 σ 域为 $\mathscr{A}_{\sigma\tau}$，易知 $\mathscr{A}_{\sigma\tau}\subset\mathscr{F}^*_{\sigma\tau}$．故为证（6.1），只要证：$\forall$ 有界 Borel 可测函数 $g(x)$，$\forall\ A\in\mathscr{F}^*_{\sigma\tau}$，有

$$
\begin{aligned}
&\int_A g[X(\sigma+a,\tau+b)]dP\\
&=\int_A E\{g[X(\sigma+a,\tau+b)]|\mathscr{A}_{\sigma\tau}\}dP. \qquad (6.2)
\end{aligned}
$$

记 $B_{kl}=(\sigma=k,\tau=l)$，则 $AB_{kl}\in\mathscr{F}^*_{kl}$．于是由（4.1），（6.2）的左方等于

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k,l}\int_{AB_{kl}} g[X(k+a,l+b)]dP\\
&=\sum_{k,l}\int_{AB_{kl}} E\{g[X(k+a,l+b)]|\mathscr{F}^*_{kl}\}dP\\
&=\sum_{k,l}\int_{AB_{kl}} E\{g[X(k+a,l+b)]|\mathscr{A}_{kl}\}dP. \qquad (6.3)
\end{aligned}
$$

易知，在 B_{kl} 上，$E\{g[X(k+a,l+b)]|\mathscr{A}_{\sigma\tau}\}=E\{g[X(k+a,$

$l+b)]|\mathscr{A}_{kl}\}$. 于是(6.3) 又等于

$$\sum_{k,l}\int_{AB_{kl}} E\{g[X(k+a,l+b)]|\mathscr{A}_{\sigma\tau}\}dP$$
$$=\int_A E\{g[X(\sigma+a,\tau+b)]|\mathscr{A}_{\sigma\tau}\}dP.$$

得证 (6.2). ∎

§8.3 RW$_2$ 的单点和三点转移函数族

设 X 为 RW_2, $z=(m,n)\in T_+^2$, $z'=(u,v)\in T_+^2$, $z\leqslant z'$, $z\neq z'$. X 的单点转移函数族 $\mathscr{P}=\{P_{ij}(z,z'),z\leqslant z',z\neq z',i,j\in E\}$ 定义为:

$$P_{ij}(z,z')\doteq P\{X(z')=j|X(z)=i\}$$
$$=P\{X(A)=j-i\}. \tag{6.4}$$

其中 $A=[0,z']-[0,z]$, $X(A)=\sum_{l\in A}Y(l)$. 用 $|A|$ 和 $|A_*|$ 分别表示 $A\cap T_+^2$ 和 AN^2 中点的个数，即

$$|A|=(u+1)(v+1)-(m+1)(n+1),$$
$$|A_*|=uv-mn. \tag{6.5}$$

下面的定理 8.7，其证明是明显的.

8.7 定理 设 $RW_2(P_\mu)$ 有零初值，则单点转移函数族 $\mathscr{P}$ 的元素为

$$P_{ij}((m,n),(u,v))$$
$$=\begin{cases} e^{-\mu|A_*|}\cdot\dfrac{(\mu|A_*|)^{j-i}}{(j-i)!}, & \text{如 } j\geqslant i;\\ 0, & \text{如 } j<i.\end{cases} \tag{7.1}$$

对于 II-$RW_2(P_\mu)$，其单点转移函数族 $\mathscr{P}$ 的元素，只需在 (7.1) 中用 $|A|$ 代替 $|A_*|$ 即得.

8.8 定理 设 $RW_2(B)$ 有零初值，则它的单点转移函数族 $\mathscr{P}$ 的元素为

$$P_{ij}((m,n),(u,v))$$

$$
=\begin{cases} C_{|A_*|}^{\frac{|A_*|-|j-i|}{2}} q^{\frac{|A_*|+|j-i|}{2}} p^{\frac{|A_*|-|j-i|}{2}}, & \text{如 } |A_*|-|j-i| \text{ 为零或偶数；} \\ 0 & \text{其它情形.} \end{cases} \tag{8.1}
$$

对于 $II\text{-}RW_2(B)$ 的情形，只需在上式中用 $|A|$ 代替 $|A_*|$ 即得. 特别地，对零初值的 $RW_2(S)$，有

$$
P_{ij}((m,n),(u,v))
$$

$$
=\begin{cases} C_{|A_*|}^{\frac{|A_*|-|j-i|}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{|A_*|}, & \text{如 } |A_*|-|j-i| \text{ 为零或偶数；} \\ 0 & \text{，其它情形.} \end{cases} \tag{8.2}
$$

从 (7.1) 和 (8.1) 看出，零初值的 $RW_2(P_p)$，零初值的 $RW_2(B)$，$II\text{-}RW_2(B)$ 的单点转移函数族均是非齐次的，因为它们除了依赖于 $u-m$ 和 $v-n$ 外，还依赖于 m 和 n.

8.9 定理 $RW_2(\pi)$ 有三点转移函数族 $\mathscr{P}=\{P_{ijkr}(m,n;a,b),(m,n)\in T_+^2,(a,b)\in N^2,\ i,\ j,\ k,\ r\in E\}$：

$$
P_{ijkr}(m,n;a,b)=\pi^{*ab}(r-k-j+i). \tag{9.1}
$$

其中 π^{*a} 表示 π 的 a 次卷积，π^{*0} 是在 0 点的单点分布.

证 由 (1.4)，当 $\Delta=\{X(m,n)=i,X(m,n+b)=j,X(m+a,n)=k\}$ 的概率为正时，

$$
\begin{aligned}
&P\{X(m+a,n+b)=r|\Delta\} \\
&=P\{X(\Delta_{mn})=r-k-j+i|\Delta\} \\
&=P\left\{\sum_{u=m+1}^{m+a}\sum_{v=n+1}^{n+b}Y(u,v)=r-k-j+i\right\} \\
&=\pi^{*ab}(r-k-j+i),
\end{aligned}
$$

故如能证明由 (9.1) 确定的族 $\mathscr{P}$ 满足定义 6.1 中 $(A)(B)(C)(D)$ 则 $\mathscr{P}$ 就是 $RW_2(\pi)$ 的三点转移函数族.

$(A)(B)$ 不待证. 往证 (C)，即对任意 $\xi\in E$，$a'\in N$，有

$$
\begin{aligned}
&P_{ijkr}(m,n;a+a',b) \\
&=\sum_{l}P_{ijkl}(m,n;a,b)P_{jlkr}(m+a,n;a',b)
\end{aligned} \tag{9.2}
$$

而这可依（9.1）对（9.2）直接验证．类似证（D）． ∎

由（9.1）知，$RW_2(\pi)$ 的三点转移函数族与 (m,n) 无关，因而是齐次的．简记(9.1) 为 $P_{ijkr}(a,b)$．

8.10 系 $P_{ijkr}(a,b) = P_{000(r-k-j+i)}(a,b)$

8.11 系 $P_{ijkr}(a,b) = P_{ijkr}(ab,1) = P_{ijkr}(1,ab)$

8.12 系 RW_2 的三点转移函数族 $\mathscr{P}$ 是参数对称型的，$\mathscr{P}$ 也是状态对称型的．

8.13 系 $RW_2(P_\mu)$ 的三点转移函数族 $\mathscr{P}$ 的元素为

$$
P_{ijkr}(a,b) = \begin{cases} e^{-\mu ab}\dfrac{(\mu ab)^{r-k-j+i}}{(r-k-j+i)!}, & \text{如 } r-k-j+i \geqslant 0; \\ 0, & \text{如 } r-k-j+i < 0. \end{cases}
$$

8.14 系 $RW_2(B)$ 的三点转移函数族 $\mathscr{P}$ 的元素为

$$
P_{ijkr}(a,b) = \begin{cases} C_{ab}^{\frac{h}{2}} q^{\frac{h}{2}} p^{ab-\frac{h}{2}}, & \text{如 } h = ab - |r-k-j+i| \\ & \text{为零或偶数;} \\ 0, & \text{其它情形}. \end{cases}
$$

§ 8.4 RW$_2$ 的常返性

8.15 定义 设 X 是 RW_2，$i\in E$．记号 Δ 可以是 λ^1，λ^2，T^2_+ 或 N^2．记概率

$$
r(z,\Delta) = P\{X(z+z') = i \text{ 对某 } z' \neq 0, z' \in \Delta \mid X(z) = i\}.
$$

只要 $P\{X(z)=i\} > 0$．设 z 任意．如果 $r(z,\lambda^1) = 1$，称 i 为水平常返的；如果 $r(z,\lambda^2) = 1$，称 i 为竖直常返的；如果 $r(z,T^2_+) = 1$，称 i 为常返的；如果 $r(z,N^2) = 1$，称 i 为严格常返的．如果一切 $i\in E$ 均是某种类型常返的，称 RW_2 为该类型常返的．

水平常返、竖直常返和严格常返均是常返的．如果 RW_2 的所有水平截口过程 X^1_n（相应地，竖直截口过程 X^2_m）均是单参数常返

过程时，则 RW_2 是水平常返的（相应地，竖直常返的）.

下面的两个定理是明显的.

8.16 定理 $RW_2(S)$ 水平常返，竖直常返，严格常返，常返. 当 $p\neq q$ 时，$RW_2(B)$ 的所有状态 i 均是非水平常返、非竖直常返、非严格常返、非常返.

8.17 定理 对于 $RW_2(P_a)$，一切状态 i 均非水平常返、非竖直常返、非严格常返、非常返.

§8.5 RW_a^d 的周期性

本节设 $d\geqslant 2$. 对单参数的 RW_1^d，设 $P_{xy}(n)$ 是 n 步转移概率，$x,y\in E^d$. 记 $\Sigma=\{y:P_{0y}(1)>0\}$，$E_+^d=\{y:P_{0y}(n)>0$ 对某 $n\geqslant 0\}$，$E_*^d=\{x:x=x_1-x_2,x_1,x_2\in E_+^d\}$. 则对任 $x\in E^d-E_*^d$，有 $P_{0x}(n)=0$ 对一切 n，因而从 0 出发的随机游动质点永不到达 x，故状态 x 实际上可去掉. 如果 $E_*^d=E^d$，称 RW_1^d 为非周期的；否则称 RW_1^d 为周期的. 这里的周期性与通常单参数马氏链中状态的周期性不同.

我们研究 $RW_a^d(\pi)(a\geqslant 1)$ 的周期性. 它仅由 π 决定. 因此，我们下面取 X 为零初值的 $RW_a^d(\pi)$. 记 $e=(1,\cdots,1)\in T_+^a$. 下面三集合由 π 完全决定：

$$\Sigma=\{x:\pi(x)>0\}=\{x:P[X(e)=x]>0\},$$

$$E_+^d=\{x:\pi^{*\langle z\rangle}(x)>0 \text{ 对某 } z\in T_+^a\}$$

$$=\{x:P[X(z)=x]>0 \text{ 对某 } z\},$$

$$E_*^d=\{x:x=x_1-x_2,x_1,x_2\in E_+^d\}.$$

其中，$\langle z\rangle$ 表示 z 的各坐标分量之积，π^{*n}表示 π 的 n 次卷积. 显然 $0\in E_+^d\subset E_*^d$. 对 $x\in E^d-E_*^d$，必有 $P\{X(z)\neq x$ 对一切 $z\in T_+^a\}=1$，故作随机游动的质点永不停 x，因而状态 x 实质上可去掉.

8.18 定义 如果 E_*^d 是 d 维集，称 RW_a^d 是真 d 维的.

8.19 定义 如果 $E_*^d=E^d$，称 RW_a^d 是非周期的；否则称为周

期的.

8.20 定义 设 X 是零初值的 $RW_0^d(\pi)$. 称

$$\varphi(\theta) = \sum_{x\in E^d} P\{X(e) = x\} e^{i(\theta x)} = \sum_{x\in E^d} \pi(x) e^{i(\theta x)},$$

$$\theta \in R^d, i = \sqrt{-1}. \qquad (20.1)$$

为 $RW_0^d(\pi)$ 的特征函数. 这里 R^d 是 d 维欧氏空间, (θx) 表示 θ 与 x 的内积.

8.21 定理 E_+^d 是 Σ 中元素的所有有限和构成的集, 它是含 Σ 的最小加法半群（对加法运算封闭, 且含原点), E_*^d 是包含 E_+^d 的、E^d 的最小加法子群.

证 空和也算有限和, 故 $0\in E_+^d$.

设 $x\neq 0$, $x\in E_+^d$. 则存在 $z\in T_+^d$ 使 $P\{X(z) = x\} > 0$. 因 X 有零初值, 而 $x \neq 0$, 故 $e \leqslant z$, 于是 $P\{\sum_{e\leqslant l\leqslant z} Y(l) = x\} > 0$. 从而必存在 $x_l \in E^d, e\leqslant l\leqslant z$, 使 $\sum_{e\leqslant l\leqslant z} x_l = x$, 且 $P\{Y(l) = x_l, e\leqslant l\leqslant z\} > 0$. 由于 $Y(l), e\leqslant l\leqslant z$ 独立同分布 π, 故 $\prod_{e\leqslant l\leqslant z} \pi(x_l) > 0$, 从而 $\pi(x_l) > 0$, 所以 $x_l \in \Sigma$. 因而 $x = \sum_{e\leqslant l\leqslant z} x_l$ 是 Σ 中元的有限和.

设 $x = \sum_{i=1}^n x_i$, $x_i\in\Sigma$. 由于对 $z = (1, n)$ 有

$$P\{X(z) = x\} = P\{\sum_{i=1}^n Y(1,i) = x\}$$

$$\geqslant P\{\bigcap_{i=1}^n [Y(1,i) = x_i]\}$$

$$= \prod_{i=1}^n \pi(x_i) > 0,$$

故 $x\in E_+^d$. 所以 E_+^d 是 Σ 中元的所有有限和构成的集.

易见 $\Sigma\subset E_+^d$, 已说明 $0\in E_+^d$. 往证 E_+^d 对加法封闭. 设 x, $x'\in E_+^d$, 要证 $x+x'\in E_+^d$. 不妨设 x, $x'\neq 0$. 则象上段一样, 存在 z, z' 均 $\geqslant e$, 存在 $x_l\in\Sigma$, $e\leqslant l\leqslant z$, 和 $x'_l\in\Sigma$, $e\leqslant l\leqslant z'$, 使 $x=$

$\sum\limits_{r\leqslant l\leqslant s} x_l$，$x'=\sum\limits_{r'\leqslant l\leqslant s'} x'_l$，故 $x+x'$ 仍是 Σ 中元素的有限和，即 $x+x'\in E^d_+$. 所以 E^d_+ 是加法半群. 显然，E^d_+ 是包含 Σ 的最小加法半群.

易见 $E^d_\pm\supset E^d$，$E^d_\pm$ 对加法运算封闭. 设 $x,x'\in E^d_\pm$，则 $x=x_1-x_2$，$x'=x'_1-x'_2$，$x_1,x_2,x'_1,x'_2\in E^d_+$，从而 $x-x'=(x_1+x'_2)-(x_2+x'_1)\in E^d_\pm$. 故 $E^d_\pm$ 对减法封闭，因而 $E^d_\pm$ 是加法子群. 不难看出，它也是包含 E^d 的，E^d 的最小加法子群. ▉

为方便计，设 $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_d)\in R^d$，$|\theta|^2=\sum\limits_{i=1}^{d}\theta_i^2$，$C\equiv\{\theta:\theta\in R^d,\ |\theta_i|\leqslant\pi,\ 1\leqslant i\leqslant d\}$.

8.22 引理 设 A 是 d 阶正定矩阵，其特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_d$，且 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_d$. 则

$$\lambda_1|\theta|^2\leqslant\theta A\theta'\leqslant\lambda_d|\theta|^2. \tag{22.1}$$

其中 θ' 是 θ 的转置.

证 这是北京大学数学力学系编《高等代数》第 379 页习题 7 的结论. ▉

8.23 定理 设 RW^d_π 是真 d 维的，其特征函数为 $\varphi(\theta)$. 则存在常数 $\lambda>0$，使

$$1-R_e\varphi(\theta)\geqslant\lambda|\theta|^2,\theta\in C. \tag{23.1}$$

证 因 $E^d_\pm$ 是 d 维的，故可在 Σ 中找到 d 个线性无关的向量 a_1，…，a_d. 令 $L=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant d}|a_k|$. 则 $L\geqslant1$. 作实二次型

$$Q_L(\theta)=\sum_{|x|\leqslant L}(x\theta)^2\pi(x),\theta\in R^d,$$

则 $Q_L(\theta)$ 是正定的. 事实上

$$Q_L(\theta)\geqslant\sum_{k=1}^{d}(a_k\theta)^2\pi(a_k).$$

上式右边当且仅当 θ 垂直于 a_1，…，a_d 时才等于 0. 而 θ 同时垂直 a_1，…，a_d 只可能 $\theta=0$. 故 $Q_L(\theta)$ 正定.

由于

$$1-Re\varphi(\theta)=\sum_{x\in E^d}\pi(x)-\sum_{x\in E^d}\pi(x)\cos(x\theta)$$

$$= \sum_{x\in E^d}\pi(x)[1-\cos(x\theta)] = 2\sum_{x\in E^d}\pi(x)\sin^2\frac{(x\theta)}{2}$$

$$\geq 2\sum_{x\in D}\pi(x)\sin^2\frac{(x\theta)}{2},$$

$$\left|\sin\frac{(x\theta)}{2}\right| \geq \frac{|x\theta|}{\pi}, \qquad 当\ |x\theta|\leq\pi\ 时.$$

故令 $D=\{x:\ |x|\leq L,\ |x\theta|\leq\pi\}$，则

$$1-Re\varphi(\theta)\geq\frac{2}{\pi^2}\sum_{x\in D}(x\theta)\pi(x).$$

但当 $|\theta|\leq\pi/L$ 时，由 $|x|\leq L$ 可以推出 $|x\theta|\leq\pi$. 故当 $|\theta|\leq\pi/L$ 时，

$$1-Re\varphi(\theta)\geq\frac{2}{\pi}\sum_{|x|\leq L}(x\theta)^2\pi(x)=\frac{2}{\pi}Q_L(\theta).$$

设 λ_1 是 $Q_L(\theta)$ 的最小特征值，由引理 8.22，

$$1-Re\varphi(\theta)\geq\frac{2}{\pi}\lambda_1|\theta|^2，当\ |\theta|\leq\pi/L\ 时.$$

因 $1-Re\varphi(\theta)$ 是 C 上的连续函数，所以

$$m=\min\{1-Re\varphi(\theta):\theta\in C,|\theta|\geq\pi/L\},$$

于是

$$1-Re\varphi(\theta)\geq m\frac{L^2}{\pi^2}|\theta|^2，当\ |\theta|\geq\pi/L\ 时.$$

取 $\lambda=\min\{2\lambda_1/\pi^2,\ mL^2/\pi^2\}$ 便得 (23.1). ∎

8.24 引理 设 $x,\ y\in E^d$，则

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_C e^{i\theta(x-y)}d\theta=\delta(x,y), \tag{24.1}$$

$\delta(x,y)$ 为 Krockner 记号.

证 设 $x=(x_1,\cdots,x_d)$，$y=(y_1,\cdots,y_d)$，则 (24.1) 左方等于

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_C e^{i\sum_{k=1}^{d}\theta_k(x_k-y_k)}d\theta=\frac{1}{(2\pi)^d}\prod_{k=1}^{d}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\theta_k(x_k-y_k)}d\theta_k$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^d}\prod_{k=1}^{d}2\pi\delta(x_k,y_k)=\prod_{k=1}^{d}\delta(x_k,y_k)=\delta(x,y). \qquad ∎$$

8.25 定理 设 $\varphi(\theta)$ 是 $RW_a^d(\pi)$ 的特征函数，X 是初值为 0 的

$RW_a^d(\pi)$. 则

(i) $[\varphi(\theta)]^{(z)} = \sum_{x\in E^d} \pi^{*(z)}(x)e^{ix\theta}, \theta \in R^d.$ (25.1)

(ii) $P\{X(z) = y\} = \pi^{*(x)}(y)$

$$= (2\pi)^{-d}\int_C e^{-iy\theta}[\varphi(\theta)]^{(z)}d\theta, y \in E^d. \quad (25.2)$$

证 取 X 为零初值 $RW_a^d(\pi)$.

(i) (25.1) 右方等于

$$\sum_{x\in E^d} P\{X(z) = x\}e^{ix\theta} = E\{e^{i[\sum_{0\leqslant l\leqslant z} y(l)]\theta}\}$$

$$= \prod_{0\leqslant l\leqslant z} E\{e^{iy(l)\theta}\} = [\varphi(\theta)]^{(z)}.$$

(ii) (25.2) 右方等于

$$(2\pi)^{-d}\int_C e^{-iy\theta}\sum_{x\in E^d} P\{X(z) = x\}e^{ix\theta}d\theta$$

$$= \sum_{x\in E^d} P\{X(z) = x\}(2\pi)^{-d}\int_C e^{i(x-y)\theta}d\theta.$$

由引理 8.24，上式等于 $\sum_{x\in E^d} P\{X(z) = x\}\delta(x,y) = P\{X(z) = y\}$

$= \pi^{*(z)}(y)$. ∎

8.26 定理 设 $RW_a^d(\pi)$ 是真 d 维的，$\nu(x) \equiv \sum_y \pi(y)\pi(x+y), x \in E^d$，$RW_a^d(\nu)$ 也是真 d 维的. X 是零初值 $RW_a^d(\pi)$，则存在与 x 无关的常数 $A > 0$，使

$$P\{X(z) = x\} \leqslant A(\langle z\rangle)^{-d/2}. \quad (26.1)$$

证 设 $RW_a^d(\pi)$ 的特征函数为 $\varphi(\theta)$. 设 $RW_a^d(\nu)$ 的特征函数为 $\psi(\theta)$. 则由 ν 的定义，易知

$$\psi(\theta) = \sum_{x\in E^d} \nu(x)e^{ix\theta} = \varphi(-\theta)\varphi(\theta) = |\varphi(\theta)|^2. \quad (26.2)$$

今估计 P $\{X(z) = x\}$. 由定理 8.25，

$$(2\pi)^d \sup_{x\in E^d} P\{X(z) = x\} = \sup_{x\in E^d}\int_C e^{-ix\theta}[\varphi(\theta)]^{(z)}d\theta$$

$$\leqslant \int_C |\varphi(\theta)|^{(z)}d\theta$$

$$\leqslant \begin{cases} \int_C [\psi(\theta)]^{\langle z\rangle/2} d\theta, \text{如} \langle z\rangle \text{ 为偶数;} \\ \int_C [\psi(\theta)]^{\frac{\langle z\rangle-1}{2}} d\theta, \text{如} \langle z\rangle \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

由于 $RW_a^d(\nu)$ 是真 d 维的，由定理 8.23，存在常数 $\lambda>0$ 使

$$1-\psi(\theta)\geqslant\lambda|\theta|^2,\qquad \theta\in C.$$

$$0\leqslant\psi(\theta)\leqslant1-\lambda|\theta|^2\leqslant e^{-\lambda|\theta|^2},\theta\in C.$$

于是，当 $\langle z\rangle$ 为偶数时，

$$\int_C [\psi(\theta)]^{\frac{\langle z\rangle}{2}} d\theta \leqslant \int_C e^{-\lambda|\theta|^2\frac{\langle z\rangle}{2}} d\theta$$

$$\leqslant \int_{E^d} e^{-\lambda|\theta|^2\frac{\langle z\rangle}{2}} d\theta = \left(\frac{\langle z\rangle}{2}\right)^{-\frac{d}{2}} \int_{E^d} e^{-\lambda|\alpha|^2} d\alpha$$

$$= A(\langle z\rangle)^{-\frac{d}{2}}.$$

其中 $A=2^{\frac{d}{2}}\int_{E^d} e^{-\lambda|\alpha|^2}d\alpha$. 同理，当 $\langle z\rangle$ 为奇数时，

$$\int_C [\psi(\theta)]^{\frac{\langle z\rangle-1}{2}} d\theta \leqslant A(\langle z\rangle-1)^{-\frac{d}{2}} \leqslant A\left(\frac{\langle z\rangle}{2}\right)^{-\frac{d}{2}}$$

$$\leqslant A(\langle z\rangle)^{-\frac{d}{2}}.$$

故不管 $\langle z\rangle$ 奇或偶，(26.1) 恒成立. ∎

有了以上准备，现在叙述非周期性判别准则.

8.27 定理 RW_a^d 非周期的充要条件是它的特征函数 $\varphi(\theta)$ 具有下列性质：$\varphi(\theta)=1$ 当且仅当 θ 的各分量是 2π 的整数倍.

证 令 $R_*^d=\{\theta\in R^d:\varphi(\theta)=1\}$，$R_1^d=\{\theta\in R^d:(2\pi)^{-1}\theta_k$ $=$整数，$1\leqslant k\leqslant d\}$，则定理化为

$$E_*^d=E^d \Longleftrightarrow R_*^d=R_1^d. \tag{27.1}$$

往证"$\Longrightarrow$". 由 $\varphi(\theta)$ 的定义，显然 $R_1^d\subset R_*^d$，故只要证 $R_*^d\subset R_1^d$. 设 $\theta\in R_*^d$. 这意味着对一切 $x\in\Sigma$，$(2\pi)^{-1}\theta x$ 是整数. 按 E_+^d 的定义，对 $x\in E_+^d$，$(2\pi)^{-1}\theta x$ 是整数. 按 E_*^d 的定义，对 $x\in E_*^d$，$(2\pi)^{-1}\theta x$ 是整数. 但我们已假设 $E_*^d=E^d$，故对每一单位 $\epsilon_k=(\delta_{kj},1\leqslant j\leqslant d)$，$1\leqslant k\leqslant d$，$(2\pi)^{-1}\theta\epsilon_k$ 是整数，从而 θ 的每个分量是 2π 的整数倍. 于是 $\theta\in R_1^d$. 从而 $R_*^d\subset R_1^d$. "$\Longrightarrow$" 证完.

往证“$\Longleftarrow$”. 当 R_1^d 和 E^d 的公共维数 d 是零时，证明平凡. 故我们假设 E_*^d 是 E^d 的真子集，且 $d=\dim(R_1^d)=\dim(E^d)\geqslant 1$. 我们如能构造点 $\theta_0\in R_*^d-R_1^d$，即 θ_0 具有性质：对一切 $x\in E_*^d$，$(2\pi)^{-1}\theta_0 x$ 为整数；$(2\pi)^{-1}\theta_0$ 有非整数的坐标分量. 则证明了“$\Longleftarrow$”.

应用下面列出的命题 8.28，我们构造 E_*^d 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$，$k\leqslant d$. 如 $k=\dim(E_*^d)<d$，只需取 $\beta\in R^d$ 垂直于每个 $\alpha_j,1\leqslant j\leqslant k$，且使 $(2\pi)^{-1}\beta$ 有非整数的坐标分量，然后取 $\theta_0=\beta$ 即可.

假定 $k=\dim(E_*^d)=d$. 设基

$$\alpha_i=(a_{i1},\cdots,a_{id}),1\leqslant i\leqslant d.$$

令 $\mathscr{A}=\{x:\ x=\sum_{i=1}^{d}\xi_i\alpha_i,\ 0\leqslant\xi_i\leqslant 1\}\subset R^d$，$\mathscr{A}$ 称为 E_*^d 的基本平行体. 它的顶点（对每个 i，$\xi_i=0$ 或 1）属于 E_*^d. 实际上 E_*^d 是由这些顶点产生的群. 非顶点的 $x\in\mathscr{A}$ 称为 $\mathscr{A}$ 的内点. 按假设 $E_*^d\neq E^d$，故显然 $\mathscr{A}$ 的内点必属于 E^d. 依照下面列出的命题 8.29，$\mathscr{A}$ 的体积 $V>1$.

注意 $|\det A|=V>1$，其中 $A=(a_{ij})_{d\times d}$ 是矩阵. 因 $\alpha_1,\cdots,\alpha_d$ 独立，故 $|\det A|\neq 0$. 从而 A^{-1} 的行列式为 $(\det A)^{-1}$，且绝对值小于 1. 这推出：不是 A^{-1} 的每个元均为整数. 设非整数元位于 A^{-1} 的第 p 列. 此时令 θ_0 为该列乘 2π，即

$$\theta_0=2\pi(A_{1p}^{-1},A_{2p}^{-1},\cdots,A_{dp}^{-1}).\tag{27.2}$$

因 AA^{-1} 为单位矩阵，故 $(2\pi)^{-1}\alpha_k\theta_0=\delta(k,p)$. 于是对 $x=\alpha_1,\cdots,\alpha_d$. 从而对一切 $x\in E_*^d$，$(2\pi)^{-1}x\theta_0$ 是整数. 这样，(27.2) 的 θ_0 满足要求，即 $\theta_0\in R_*^d-R_1^d$. ∎

下面的两个命题的证明略写了，有兴趣的读者可参看 (F. Spitzer [1]，第 65，69 页).

8.28 命题 设 E^d 是 d 维整数格点组成的群，D 是 E^d 的真子群，$D-\{0\}\neq\varnothing$. 则存在整数 k，$1\leqslant k\leqslant d$，和线性独立的 $x_1,\cdots,x_k\in D$，使 D 是由 $x_1,\cdots,x_k$ 产生的加法群.

8.29 命题 设基本平行体含一个内格子点，则其体积大于 1.

8.30 系 $RW_a(B)$ 是非周期的.

证 $\varphi(\theta) = \sum\limits_x B(x)e^{ix\theta} = pe^{i\theta} + qe^{-i\theta}$

$= (p\cos\theta + q\cos\theta) + i(p\sin\theta - q\sin\theta)$.

显然有 $\varphi(\theta) = 1 \Longleftrightarrow \theta$ 是 2π 的整数倍. ∎

8.31 系 设分布 μ:$\mu(-2) = p, \mu(2) = q, 0 < p < 1, p + q = 1$. 则 $RW_a(\mu)$ 是周期的.

证 $\varphi(\theta) = pe^{-2i\theta} + qe^{2i\theta} = \cos 2\theta + i(q - p)\sin 2\theta$

容易验证,即使 $\varphi(\theta) = 1$, θ 也未必是 2π 的整数倍,因而 $RW_a(\mu)$ 是周期的. ∎

9 两参数独立增量过程：Levy 单

§9.1 Levy 单

在本章中，我们假定 $(E,\mathscr{E})$ 为 $(R^1,\mathscr{B}^1)$.

9.1 定义 称 $X=\{X(z),z\in T_+^2\}$ 是独立增量过程，如果对 T_+^2 中互不相交的矩形 $(a_i,b_i]$，$1\leqslant i\leqslant n$，诸 $X(a_i,b_i]$，$1\leqslant i\leqslant n$，$X(\lambda_0)=\{X(z),z\in\lambda_0\}$，相互独立. λ_0 是 T_+^2 的边界.

非随机的函数 $X(z,w)=f(z)$ 是两参数独立增量过程的一个平凡例子. 由此看出，要使独立增量过程具有某种连续性，必需首先减去它的非随机的不连续部分.

9.2 定义 两参数独立增量过程称为退化的，如果存在单参数独立增量过程 Y 及常数 a，使得 X 是下面四个两参数过程之一的修正：$(s,t)\in T_+^2$，

$Y(s)I_{(a<t)}$, $Y(t)I_{(a<s)}$, $Y(s)I_{(a\leqslant t)}$, $Y(t)I_{(a\leqslant s)}$.

9.3 定义 设两参数独立增量过程 $X=\{X(z),z\in R_+^2\}$ 是零初值的，并且是随机连续的，称 X 为两参数 Levy 过程，或称 Levy 单.

9.4 定义 设 ξ 是实值随机变量，称实数 $\nu(\xi)$ 为 ξ 的中位数，如果 $\nu(\xi)$ 满足

$$E(\operatorname{arctg}[\xi-\nu(\xi)]=)0, \tag{4.1}$$

称两参数过程 X 是中位的，如果

$$\nu[X(z)]=0,z\in T_+^2. \tag{4.2}$$

显然，满足 (4.1) 的 $\nu(\xi)$ 唯一. 任何过程 X 都可以分解成

中位过程 $\{X(z)-\nu[X(z)], z\in T_+^2\}$ 和决定性的过程 $\{\nu[X(z)], z\in T_+^2\}$ 的和. 显然,如果 X 随机连续,则函数 $\nu[X(z)]$ 连续. 这样,当我们研究 Levy 单的样本函数的连续性时,不失一般性,可设 X 是中位的.

§9.2 Levy 单的表现和构造

下面的公式称为 Levy-Khinchin 公式.

9.5 定理 设 $X=\{X(z), z\in R_+^2\}$ 是实值 Levy 单. 则 X 的特征函数

$$E\{e^{iuX(z)}\}=\exp\left\{iuM(z)-\frac{1}{2}u^2V(z)+\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}G(z,dx)\right\},$$

$$i=\sqrt{-1}, z\in R_+^2, \tag{5.1}$$

其中, M 是零初值的连续(实值)函数; V 是具有非负的矩形增量的零初值的连续(实值)函数; $z\in R_+^2$ 固定时, $G(z,dx)$ 是 R^1 上的有限、正的 Borel 测度, 且 $G(z,\{0\})=0$; 固定 R^1 中的 Borel 集 B, $G(\cdot,B)$ 是 R_+^2 上有限、正的 Borel 测度的分布函数, 它是零初值的, 连续的. 相反地, 如果 M,V,G 满足上述条件, 则存在 Levy 单 X, 使 (5.1) 成立.

证 由于"时间"的伸缩不影响独立增量性,不失一般性,可以考虑 R_e 上的过程 $X=\{X(z), z\in R_e\}$, 这里 $e=(1,1)\in R_+^2$.

由 X 的一致随机连续性, 对任 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使对 $A=(a,b]\subset R_e$, $|A|<\delta$, 有

$$P\{|X(A)|>\varepsilon\}<\varepsilon. \tag{5.2}$$

对每个正整数 n, 将 A 分为 n^2 等份的左开右闭区间 A_k^n, $1\leqslant k\leqslant n^2$, 则诸 $X(A_k^n)$, $1\leqslant k\leqslant n^2$, 相互独立, 且

$$X(A)=\sum_{k=1}^{n^2}X(A_k^n). \tag{5.3}$$

由于对每个 $\varepsilon>0$,

$$\lim_n \max_k P\{|X(A_k^n)| > \varepsilon\} = 0, \tag{5.4}$$

所以 $X(A)$ 的分布是无穷可分的. 由 Khinchin 公式,存在唯一的 $\hat{M}(A) \in R^1$,非负值 $\hat{V}(A)$,R^1 上的有限、正 Borel 测度 $\hat{G}(A,dx)$,且 $\hat{G}(A,\{0\}) = 0$，使得

$$E\{e^{iuX(A)}\} = \exp\{iu\hat{M}(A) - \frac{1}{2}u^2\hat{V}(A) + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{iux} - \frac{iux}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\hat{G}(A,dx). \tag{5.5}$$

当 $z\in\lambda_0$ 时，定义 $M(z) = V(z) = G(z,dx) = 0$;当 $z \in R_e - \lambda_0$ 时,定义 $M(z) = \hat{M}(R_z),V(z) = \hat{V}(R_z),G(z,dx) = \hat{G}(R_z,dx)$. 由 $\hat{M}(A),\hat{V}(A),\hat{G}(A,dx)$ 的唯一性和 X 的独立增量性,得 M,V 和 $G(\cdot,dx)$ 在矩形 A 上的增量分别为 $\hat{M}(A),\hat{V}(A),\hat{G}(A,dx)$. 由 X 的随机连续性得 M 的连续性. 由 X 的一致随机连续性得:如果 $\{A_n\}$ 是一列左开右闭区间，且 $|A_n|\longrightarrow 0$，则

$$V(A_n) \longrightarrow 0, G(A_n,dx) \longrightarrow 0\cdot dx.$$

特别地，对 Borel 集 $B\subset R^1$，有

$$G(A_n,B) \longrightarrow 0.$$

由 X 的独立增量性得:V 和 $G(\cdot,B)$ 是连续的，而且分布函数不仅是有限可加的，而且是可数可加的测度的分布函数. 由此证明了定理的第一部分.

相反的结论可直接应用 Kolmogorov 拓展定理得出. 由 M, V, $G(\cdot,dx)$ 的可加性和连续性，分别得 X 的随机连续性和独立增量性. ∎

9.6 定理 设 X 是具有高斯增量的可分 Levy 单. 则 X 的几乎一切轨道连续.

证 由于 X 的特征函数为

$$\exp\left\{iuM(z) - \frac{1}{2}u^2V(z)\right\},$$

且均值函数 M 连续，故可设 X 是中心的. 对正整数 m，定义随机变量

$$S_m = \sup\left\{ |X(z) - X(z')| : |z - z'| < \frac{1}{m} \right\}.$$

为证明定理，只要证 $S_m \xrightarrow{P} 0$ $(m \longrightarrow \infty)$. 固定 m，对 $k=1$，2，$1 \leqslant n \leqslant m-1$，定义随机变量

$$S(k, m, n) = \sup\{ |X(A(k, m, n) \cap (0,z])| : z \in R_+^2 \}.$$

其中，$A(k,m,n) = \left\{ z = (t_1, t_2) : \frac{n-1}{m} < t_k \leqslant \frac{n+1}{m} \right\}$.

由于 X 有对称的增量，故对所有 $\delta > 0$，有

$$P\{S(k,m,n) > \delta\} \leqslant 4P\{|X(A(k,m,n))| > \delta\}.$$

考虑 $z = (t_1, t_2), z' = (t_1', t_2') \in R_+^2$，$|z - z'| < \frac{1}{m}$，定义 $z_0 = z$，$z_1 = (t_1', t_2), z_2 = z'$. 显然

$$X(z') - X(z) = \sum_{k=1}^{2} [X(z_k) - X(z_{k-1})]$$

对某些 n（依赖于 z，z'，k 和 m），z_k 和 z_{k-1} 都属于 $A(k,m,n)$. 由于 z_k 和 z_{k-1} 只是第 k 个坐标不同，$k = 1,2$，故 $|X(z_k) - X(z_{k-1})| \leqslant 2S(k,m,n)$. 因此，对 $z, z' \in R_+^2$，只要 $|z - z'| < \frac{1}{m}$，有

$$|X(z) - X(z')| \leqslant 2\sum_{k=1}^{2} \max_n S(k,m,n),$$

于是有

$$\begin{aligned}
&P\{S_m > \varepsilon\} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{2} \sum_{n=1}^{m-1} P\left\{ S(k,m,n) > \frac{\varepsilon}{4} \right\} \\
&\leqslant 4\sum_{k=1}^{2} \sum_{n=1}^{m-1} P\left\{ |X(A(k,m,n))| > \frac{\varepsilon}{4} \right\} \\
&\leqslant 4\sum_{k=1}^{2} \sum_{n=1}^{m-1} \left(\frac{4}{\varepsilon} \right)^4 3\{V(A(k,m,n))\}^2 \\
&\leqslant 32^2 \left(\frac{4}{\varepsilon} \right)^4 \sum_{k=1}^{2} \max_n V(A(k,m,n)) \sum_{n=1}^{m-1} V(A(k,m,n)) \\
&\leqslant 32^2 \left(\frac{4}{\varepsilon} \right)^2 2\{\max_{k,n} V(A(k,m,n))\} V(R_+^2).
\end{aligned}$$

由于 V 连续，当 $m\to\infty$ 时，$\max\limits_{k,n} V(A(k,m,n)) \longrightarrow 0$. ∎

9.7 注 定理 9.6 的逆也真：如果 Levy 单的几乎一切轨道连续，则 X 具有高斯增量. 一旦我们研究了 Levy 单的非高斯增量的轨道性质后，上述事实就变得显然了.

9.8 Levy 单的构造

我们记

$\mathscr{D}_0 = \{f$：f 是 R_+^2 上的零初值，右连左极实值函数$\}$

如果随机过程 X 的几乎一切轨道属于 $\mathscr{D}_0$，我们也记 $X\in\mathscr{D}_0$.

记 $e=(1,1)$. 我们只需构造 R_e 上的过程 $X=\{X(z), z\in R_e\}$ 即可.

设给定 $(0,e]\times(R^1-\{0\})$ 上的 σ 有限、正测度 $N(dz,dx)$，满足条件

$$\int_{R_e}\int_{R^1}\frac{x^2}{1+x^2}N(dz,dx)<\infty. \tag{8.1}$$

定义 $R^1-\{0\}$ 上的测度 N_z：

$$N_z(B)=N[(R_z-\lambda_0)\times B], z\in R_e \quad \lambda_0. \tag{8.2}$$

$N_e(dx)$ 是 $N(dz,dx)$ 的边缘分布. 则存在正则的条件概率核 $n(dz,x)$，使得

(i) 固定 $x\in R^1$，$n(dz,x)$ 是 R_e 上的概率测度.

(ii) 固定 Borel 集 $A\subset R_e$，$n(A,\cdot)$ 是 R^1 上的可测函数.

(iii) 对 Borel 集 $A\subset R_e$，$B\subset R^1$，有

$$N(A\times B)=\int_B n(A,x)N_e(dx).$$

下面分三步构造特征函数为 (5.1) 的 Levy 单 $X\in\mathscr{D}_0$.

第 1 步 设 $N(dz,dx)$ 有限. 记 $F(dx)=N_e(dx)/N_e(R^1)$.

取参数为 $N_e(R^1)$ 的 Poisson 随机变量 ν，取独立同分布的二维随机向量序列 (J_j, T_j)，$j\geqslant 1$，其分布为：对 Borel 集 $A\subset R_e$，$B\subset R^1$，有

$$P\{J_j\in A, T_j\in B\}=\int_B n(A,x)F(dx), \tag{8.3}$$

而且 (J_j, T_j)，$j\geqslant 1$，与 ν 也独立．定义

$$X(z)=\sum_{j=1}^{\nu}J_jI_{(T_j\leqslant z)},z\in R_c. \tag{8.4}$$

显然地，$X\in\mathscr{D}_0$．下面证 X 有独立增量．

将 $R_c-\lambda_0$ 分为 n 个互不相交的左开右闭区间 A_k，$1\leqslant k\leqslant n$．对 $u_k\in R^1$，$1\leqslant k\leqslant n$，有

$$\begin{aligned}
&E\{e^{i\sum_{k=1}^{n}u_kX(A_k)}\}\\
&=E\Big(E\Big\{\exp\Big[i\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{n}u_kJ_jI_{(T_j\in A_k)}\Big]\Big|\nu,J_1,\cdots,J_\nu\Big\}\Big)\\
&=E\Big(E\Big\{\prod_{j=1}^{\nu}\exp\Big[i\sum_{k=1}^{n}u_kJ_jI_{(T_j\in A_k)}\Big]\Big|\nu,J_1,\cdots,J_\nu\Big\}\Big)\\
&=E\Big(E\Big\{\prod_{j=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{n}n(A_k,J_j)e^{iu_kJ_j}\,|\,\nu\Big\}\Big)\\
&=E\Big\{\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}n(A_k,x)e^{iu_kx}F(dx)\Big\}\\
&=\exp\Big\{\sum_{k=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{iu_kx}-1)n(A_k,x)N_z(dx)\Big\},
\end{aligned}$$

这表示 X 有独立增量．

如果用 $\psi_z(u)$ 表示 $X(z)$ 的对数特征函数（即特征函数的对数），则有

$$\psi_z(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{iux}-1)N_z(dx),z\in R_c. \tag{8.4$'$}$$

称对数特征函数为(8.4)$'$的独立增量过程为复合 Poisson 单．X 是随机连续的充要条件是：$N_z(R^1-\{0\})$ 关于 z 连续．如果 $\int_{R^1}x^2N_c(dx)<\infty$，则 $X(z)$ 的均值 $m(z)\in R^1$ 有限，且

$$m(z)=\int_{R^1}xN_z(dx),E[X(z)-m(z)]^2=\int_{R^1}x^2N_z(dx).$$

由 Wichura 最大值不等式，

$$P\{\sup_{z\in R_c}|X(z)-m(z)|>\lambda\}$$

$$\leqslant 16\lambda^{-2}\int_{R^1} x^2 N_e(dx). \tag{8.5}$$

第 2 步　设 $N(dz,dx)$ 为 σ 有限、正的测度.

取 $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_n \downarrow 0$, 使

$$\int_{|x|\leqslant\varepsilon_n} x^2 N_e(dx) \leqslant 2^{-n}, \quad n\geqslant 2.$$

对 Borel 集 $A\subset R_e-\lambda_0$, $B\subset R^1-\{0\}$, 令

$$N^0(A\times B)=N(A\times\{x\in B: |x|>\varepsilon_1\}),$$

$$N^n(A\times B)=N(A\times\{x\in B: \varepsilon_{n+1}<|x|\leqslant\varepsilon_n\}),$$

$$n\geqslant 1,$$

则 $N^n(dz,dx), n\geqslant 0$, 是 $(0,e]\times(R^1-\{0\})$ 上的有限测度. 按照第 1 步, 可以构造一列复合 Poisson 单 $X^n=\{X^n(z), z\in R_e\}\in\mathscr{D}_0$, 其对数特征函数为

$$\int (e^{iux}-1)N_z^n(dx). \tag{8.6}$$

今定义

$$X(z)=X^0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}(X^n(z)-EX^n(z)). \tag{8.7}$$

由不等式 (8.5), 级数 (8.7) 对几乎一切 ω, 关于 z 一致收敛. 于是对几乎一切 ω, $X(\omega)\in\mathscr{D}_0$. 易见 X 有独立增量, 其特征函数为

$$\int_{|x|>1}(e^{iux}-1)N_z(dx)+\int_{|x|\leqslant 1}(e^{iux}-1-iux)N_z(dx). \tag{8.8}$$

第 3 步　令

$$N[(R_z-\lambda_0)\times B]=\int_B \frac{1+x^2}{x^2}G(z,dx), \tag{8.9}$$

则 $N(dz,dx)$ 是 $(R_e-\lambda_0)\times(R^1-\{0\})$ 上的 σ 有限测度. 此测度称为 X 的 Levy 测度. 特征函数 (5.1) 的对数可写为 $\psi_z^1(u)+\psi_z^2(u)$, 其中

$$\psi_z^1(u)=\int_{|x|>1}(e^{iux}-1)N_z(dx)$$

$$+\int_{|x|\leqslant 1}(e^{iux}-1-iux)N_z(dx), \qquad (8.10)$$

$$\psi_z^2(u)=iuM(z)-\frac{1}{2}u^2V(z). \qquad (8.11)$$

由于 $N(dz,dx)$ 满足 (8.1)，我们能构造 R_+ 上的独立的两参数过程 X^1，X^2，使得 $X^1\in\mathscr{D}_0$，其对数特征函数为 ψ^1，X^2 是可分的，其对数特征函数为 ψ^2. 由定理 9.6，过程 $X=\{X^1(z)+X^2(z),z\in R_+\}$ 的几乎一切轨道属于 $\mathscr{D}_0$，特征函数为 (5.1). ∎

§9.3 Levy-Ito 轨道分解

设 f：$R_+^2\longrightarrow R^1$，为函数. f 在 $A\subset R_+^2$ 上的振幅定义为

$$W_f(A)=\sup_{z,z'\in A}|X(z)-X(z')|.$$

设 $\mathscr{A}_i$ 表示关系"$<$"和"$>$"之一，则 $\mathscr{A}=(\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2)$ 表示 R_+^2 上两点之间的关系，共有四个关系 $\mathscr{A}$.

9.9 引理 对函数 X，下列条件等价：

(i) 对每个 $\mathscr{A}$ 及 $z\in R_+^2$，如果 $\{z':z\mathscr{A}z'\}\neq\varnothing$，则极限

$$\lim_{z'\to z,z\mathscr{A}z'}X(z') \qquad (9.1)$$

存在.

(ii) 对任意正整数 m，$\varepsilon>0$，存在有限划分：a_i，$b_i\in R_{(m,m)}$，$1\leqslant i\leqslant n$，

$$R_{(m,m)}-\lambda_0=(a_1,b_1]\cup(a_2,b_2]\cup\cdots\cup(a_n,b_n], \qquad (9.2)$$

使得

$$W_X((a_k,b_k])<\varepsilon,1\leqslant k\leqslant n. \qquad (9.3)$$

(iii) 对每个 $\varepsilon>0$ 及关系 $\mathscr{A}$，在 $R_{(m,m)}$ ($m=1,2,\cdots$) 中至多存在 $l=l(\varepsilon,\mathscr{A},m)$ 个点 z_k，$1\leqslant k\leqslant l$，使得 $z_k\mathscr{A}z_{k+1}$，且

$$|X(z_k)-X(z_{k+1})|>\varepsilon,1\leqslant k\leqslant l-1. \qquad (9.4)$$

证 (i) ⇒ (ii) 因 $R_{(m,m)}$ 紧，由紧性的基本证明可得.

(ii) ⇒ (iii) 对满足 (9.4) 的任意集 $(z_1,\cdots,z_l)$，最多

只有 2 个属于划分（9.2）中的半开区间 $(a_k, b_k]$，由此得 $l \leqslant 2n+1$.

(iii) ⇒ (i)　设 (i) 不成立. 则存在 $\mathscr{A}$ 和 $z_0 \in R^2_+$，$\varepsilon_0 > 0$ 及 R^2_+ 上的序列 $\{z_k\}$，$z_k \to z_0$，使对一切 k，$z_{k+1} \mathscr{A} z_k$，$|X(z_{k+1}) - X(z_k)| > \varepsilon_0$. 此与 (iii) 矛盾. ▮

9.10 引理　设 $X = \{X(z), z \in R^2_+\}$ 是可分过程. 则集合

$$\Lambda = \{\omega: \forall\ z \in R^2_+ \text{ 及关系 } \mathscr{A}, \text{对函数 } X(\cdot,\omega), \text{极限 (9.1) 存在}\} \in \mathscr{F},$$

其概率由 X 的有限维联合分布族决定.

证　设 $S \subset R^2_+$ 是可分集，N_0 是例外集. 由引理 9.9，下面的两个集 Λ_1，Λ_2 相差一个 N_0 的子集：

$$\Lambda_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\mathscr{A}} \bigcap_{m=2}^{\infty} \bigcup_{\{z_1,\cdots,z_m\}\subset S} \bigcap_{j=1}^{m-1} \Big\{\omega: z_{j+1} \mathscr{A} z_j,$$

$$|X(z_{j+1},\omega) - X(z_j,\omega)| > \frac{1}{k}\Big\},$$

$$\Lambda_2 = \Omega - \Lambda.$$

而 $\Lambda_1 \in \mathscr{F}$，故 $\Lambda_2 \in \mathscr{F}$，从而 $\Lambda \in \mathscr{F}$. ▮

9.11 引理　设 $Y = \{Y(z), z \in R^2_+\}$ 是可分的独立增量过程. 则存在与 Y 有相同的有限维分布族的可分过程 X（X 和 Y 可以定义在不同的概率空间上），则以概率 1，极限（9.1）存在.

证　由引理 9.9，9.10 得出. ▮

由上面的叙述，我们有下面的定理.

9.12 定理　设 X 是可分的 Levy 单. 则以概率 1，极限（9.1）存在.

9.13 定理　设 X 是 Levy 单. 则存在 X 的修正 $\tilde{X}$，$\tilde{X} \in \mathscr{D}_0$.

证　对 $z \in R^2_+$，当 $z < z' \longrightarrow z$ 时，记 $X(z',\omega)$ 的极限为 $\tilde{X}(z,\omega)$. 由于 X 随机连续，故 $\tilde{X}$ 是 X 的修正. 显然 $\tilde{X} \in \mathscr{D}_0$. ▮

从现在开始至本章结束，我们恒设 Levy 单 X 可分且 $\in \mathscr{D}_0$，不言而喻，X 取实值.

对函数 f，记 $\Delta_z(f)$ 为 f 在 z 的点质量：

$$\Delta_z(f) = \lim_{\substack{a < z \leq b \\ a,b \to z}} f(a,b].$$

9.14 引理 设函数 $f \in \mathscr{D}_0$，m 为正整数. 则对任意 $\varepsilon > 0$，仅存在有限多个 $z \in R_{(m,m)}$，使 $|\Delta_z(f)| > \varepsilon$.

证 设 $z = (s,t) \in R_{(m,m)}$，定义

$$g(s,t) = f(2s \wedge m, 2t \wedge n),$$

则

$$\Delta_z(f) = \Delta_{\frac{z}{2}}(g). \tag{14.1}$$

因 $R_{(m,m)}$ 紧，$g \in \mathscr{D}_0$，由紧性基本证明得：存在矩形 $[(0,0),(m,n))$ 的有限划分

$$[a_1,b_1) \cup \cdots \cup [a_l,b_l), \tag{14.2}$$

使得

$$W_g([a_k,b_k)) < \frac{\varepsilon}{4}, 1 \leqslant k \leqslant l. \tag{14.3}$$

满足 $|\Delta_z(g)| > \varepsilon$ 的点 $z \in [(0,0),(m,n))$ 只可能在划分(14.2)中区间 $[a_k,b_k)$ 的四个角点. 由此及(14.1)得证引理. ∎

对 $\varepsilon > 0$，令 $\mathscr{B}_\varepsilon$ 是 $\{x \in R^1 : |x| > \varepsilon\}$ 上的 Borel 集全体. 对 $B \in \mathscr{B}_\varepsilon$，$z \in R_+^2$，定义 $\nu_z(\omega,B)$ 如下：当 $z \in \lambda_0$ 时，令 $\nu_z(\omega, B) = 0$；当 $z \notin \lambda_0$ 时，令

$$\nu_z(\omega,B) = \#\{z' \in R_z - \lambda_0 : \Delta_{z'}(X(\omega)) \in B\}.$$

记号 # 表示计数，而 X 是 Levy 单. 令

$$X_B(z,\omega) = \int_B x\nu_z(\omega,dx)$$

$$= \sum_{0 < y \leqslant z} \Delta_y(X(\omega)) I_B[\Delta_y(X(\omega))].$$

9.15 定理 固定 $z \in R_+^2$，$B \in \mathscr{B}_\varepsilon$，$\nu_z(B)$ 是随机变量. 固定 $z \in R_+^2$，$B \in \mathscr{B}^1$，$X_B(z)$ 是随机变量.

证 设 $B \in \mathscr{B}_\varepsilon$ 是一个开区间，$\{B_m\}$ 是上升的开区间列，$\bar{B}_m \subset B_{m+1}$，$B = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$. 对任意非负整数 n，k_1、k_2、记 $k = (k_1, k_2)$，令

$$A_n^k = (k2^{-n}, (k + (1,1))2^{-n}],$$

于是

$$\nu_z(B_m) \leqslant \overline{\lim_n} \sum_k{}' I\{X(A_n^k) \in B_m\} \leqslant \nu_z(B_m). \quad (15.1)$$

上式中 Σ' 表示对使得 $A_n^k \cap (R_z - \lambda_0) \neq \varnothing$ 的 k 求和．所以

$$\nu_z(B) = \lim_m \overline{\lim_n} \sum_k{}' I\{X(A_n^k) \in B_m\} \quad (15.2)$$

是随机变量．由单调类定理知，$\nu_z(B)$ 对任意 $B \in \mathscr{B}_\varepsilon$ 也是随机变量．用黎曼和逼近积分，可得 $X_B(z)$ 是随机变量． ∎

随机过程 $\nu(B) = \{\nu_z(B), z \in R_+^2\}$ 和 $X_B = \{X_B(z), z \in R_+^2\}$ 的轨道显然属于 $\mathscr{D}_0$，因而是可分的．

9.16 定理 设 X 是 Levy 单，$N(dz,dx)$ 是 Levy 测度．则对固定 $B \in \mathscr{B}_\varepsilon$，$\nu(B)$ 是 Poisson 单，且

$$E\nu_z(B) = N_z(B). \quad (16.1)$$

其中 N_z 由 (8.2) 定义．如果 $B_1, \cdots, B_n$ 是 $\mathscr{B}_\varepsilon$ 中互不相交的 Borel 集，则诸过程 $\nu(B_1), \cdots, \nu(B_n)$ 相互独立．

9.17 定理 设 X 是 Levy 单．固定 $B \in \mathscr{B}_\varepsilon$，过程 X_B 是复合 Poisson 单，且

$$Ee^{iuX_B(z)} = \exp\{\int_B (e^{iux} - 1) N_z(dx)\}. \quad (17.1)$$

如果 $B_1, \cdots, B_n \in \mathscr{B}_\varepsilon$ 且互不相交，$B = \bigcup_{k=1}^n B_k$，则诸过程 $X_{B_1}, \cdots, X_{B_n}$，$X - X_B$ 相互独立．

定理 9.16、9.17 的证明 固定 $B_1, \cdots, B_n$，由 (15.2) 知，定理 9.17 中诸过程的有限维分布族由 X 的有限维分布族决定．故为证定理结论，只要证与 X 等价的过程有定理结论．

对 Borel 集 $C \subset R^1 - \{0\}$，令 $N^k((0,z] \times C) = N_z(C \cap B_k)$，则 $N^k(dz,dx)$ 是 $(R_+^2 - \lambda_0) \times (R^1 - \{0\})$ 上的 Levy 测度．对 $k = 1, \cdots, n$，设 X^k 是 Levy 单的构造 9.8 中具有测度 N^k 的复合 Poisson 单，其对数特征函数为 $\psi_z^k(u)$．设 X 的对数特征函数为 $\psi_z(u)$，X^0 是构造 9.8 中具有对数特征函数

$$\psi_z^0(u) = \psi_z(u) - \sum_{k=1}^{n}\psi_z^k(u)$$

的过程. 可以使诸 X^k, $0\leqslant k\leqslant n$, 定义在同一概率空间上并且相互独立. 则过程 $\tilde{X} = \sum_{k=0}^{n} X^k$ 与 X 等价, 且 $\tilde{X}\in\mathscr{D}_0$.

设 $N^0(dz,dx)$ 表示 X^0 的 Levy 测度, 则 $N^0((R_+^2 - \lambda_0)\times B) = 0$, 其中 $B=\bigcup_{k=1}^{n} B_k$. 由 X^0的构造法知 $X_B^0(z)=0$. 因此, $\tilde{X}_{B_k} = X^k$, $1\leqslant k\leqslant n$, $\tilde{X}-\tilde{X}_B = X^0$.

上述证明也给出了 $\nu(B_1),\cdots,\nu(B_n)$ 独立性的证明. 为证 $\nu(B)$ 是 Poisson 单, 只需考虑 X 是具有 Levy 测度 $N_B(R_z - \lambda_0)\times C) = N_z(B\cap C)$ 的复合 Poisson 单. ∎

下面的定理称为 Levy-Ito 轨道分解定理.

9.18 定理 设 X 是 Levy 单, $X\in\mathscr{D}_0$. 则

$$X(z,\omega) = X_0(z,\omega) + \int_{|x|>1} x\nu_z(\omega,dx) + \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\epsilon<|x|<1} x[\nu_z(\omega,dx) - N_z(dx)]. \tag{18.1}$$

其中, X_0 是具有高斯增量的 Levy 单, 样本函数连续. 当 $\epsilon\downarrow 0$ 时, 第 2 个积分对几乎一切 ω 关于 z 一致收敛.

证 一致收敛性由定理 9.17 和 Wichura 最大不等式 (8.5) 推出, 对固定 $\delta>0$ 和 $\lambda>0$,

$$P\{\sup_{\epsilon>0}\sup_{z}|\int_{\epsilon<|x|\leqslant\delta} x[\nu_z(\omega,dx) - N_z(dx)]| > \lambda\} \leqslant 4^3\lambda^{-2}\int_{|x|\leqslant\delta} x^2 N(dx).$$

为验证极限过程

$$X_0(z) = X(z) - \int_{|x|>1} x\nu_z(dx) - \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\epsilon<|x|<1} x[\nu_z(dx) - N_z(dx)],$$

可以假定 X 与 Levy 单的构造 9.8 中的过程等价. 此时，我们立即看出：X_0 的对数特征函数为 (8.11)，且 X_0 与积分独立. 由于收敛关于 z 一致，故 $X_0\in\mathscr{D}_0$. 依定理 9.6，X_0 的几乎一切轨道连续. ∎

§9.4 Levy 单的样本函数

本节定理的证明由 §9.2，§9.3 中结论易得，故从略.

9.19 定理 设 X 是 Levy 单，$X\in\mathscr{D}_0$. 下列条件等价：

(i) 以概率 1，X 的轨道几乎处处无跳跃（即 $\Delta_z X=0$ 对几乎一切 $z\in R_+^2$）.

(ii) 以概率 1，X 的轨道几乎处处连续.

(iii) X 具有高斯增量.

9.20 定理 设 X 是 Levy 单，$X\in\mathscr{D}_0$. 则 X 是阶梯过程的充要条件是 X 为复合 Poisson 单.

9.21 定理 设 X 是 Levy 单，$X\in\mathscr{D}_0$. 则 X 是矩形增的充要条件是：X 的 Levy 测度 $N(dz,dx)$ 满足

$$N((R_+^2-\lambda_0)\times(-\infty,0])=0,$$

$$\int_{R_+^2}\int_{x>0}\frac{x}{1+x}N(dz,dx)<\infty,$$

且存在增的连续函数 $m\in\mathscr{D}_0$，使

$$E(e^{iuX(z)})=\exp\{ium(z)+\int_0^\infty(e^{iux}-1)N_z(dx)\}.$$

9.22 定义 设 $f\in\mathscr{D}_0$ 是实值函数. 称

$$T_z(f)=\sup\sum_{k=1}^n|f(a_k,b_k]|$$

为 f 在 R_z 上的全变差，其中上确界取 $R_z-\lambda_0$ 的所有有限划分：$(a_k,b_k]$，$1\leqslant k\leqslant n$. 称 f 在 R_+^2 上有有限全变差，如果对任意 $z\in R_+^2$，$T_z(f)<\infty$.

9.23 定理 设 X 是 Levy 单，$X\in\mathscr{D}_0$. 则 X 的轨道有全变差

的充要条件是：X 的 Levy 测度满足

$$\int_{R_+^2}\int_{|x|<1}|x|N(dz,dx)<\infty,$$

而且，存在有限全变差的连续函数 $m\in\mathscr{D}_0$，使

$$Ee^{iuX(z)}=\exp\{ium(z)+\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{iux}-1)N_z(dx)\}.$$

§9.5　Levy 单的 Levy 马氏性

9.24 定理　设 $X=\{X(z),z\in R_+^2\}$ 是 Levy 单. 记 $\mathscr{B}_b=\{A\in\mathscr{B}_+^2: A$ 有界$\}$. 则存在唯一的随机广义测度 $X(A,\omega)$，$A\in\mathscr{B}_+^2$，$\omega\in\Omega$，具有性质

(i) 对一切 $\omega\in\Omega$，$X(\cdot,\omega)$ 是 $\mathscr{B}_+^2$ 上的 σ 有限广义测度，且在 $\mathscr{B}_b$ 上的值有限.

(ii) 当 A 为矩形 $(z,z']$ 时，以概率 1，测度值 $X(A)$ 等于矩形增量值 $X(z,z']$.

证　先构造 $X(A,\omega)$,再证唯一性. 令

$$\mathscr{C}=\{(r,s]:r,s \text{ 为 } R_+^2 \text{ 中有理点}, r<s\},$$

设 $w\in\Omega_0$ 对 $A=(r,s]\in\mathscr{C}$，定义 $X(A,\omega)$ 为 X 在 $(r,s]$ 上的增量值 $X(r,s](\omega)$：

$$X(A,\omega)=X(s,\omega)-X(s\otimes r,\omega)-X(r\otimes s,\omega)+X(r,\omega). \tag{24.1}$$

往证 $X(\cdot,\omega)$ 是 $\mathscr{C}$ 上的有限值广义测度. 显然，$X(\cdot,\omega)$ 在 $\mathscr{C}$ 上有限且有限可加，因而只需证连续性，即 $A_n\in\mathscr{C}$，$A_n\downarrow\varnothing$ 时，$X(A_n,\omega)\longrightarrow 0$. 实际上，由定理 9.13，以概率 1，$X(A_n,\omega)$ 的极限存在. 由 (24.1) 和 X 的随机连续性知 $X(A_n)\xrightarrow{p}0$，从而以概率 1，$X(A_n,\omega)\longrightarrow 0$. 由于 $\mathscr{C}$ 可数，故存在 Ω_0，$P(\Omega_0)=1$，当 $\omega\in\Omega_0$ 时，$X(\cdot,\omega)$ 是 $\mathscr{C}$ 上的广义测度. 不失一般性，可设 $\Omega=\Omega_0$. 由广义测度扩张定理，可以把 $\mathscr{C}$ 上的测度 $X(\cdot,\omega)$ 唯一地扩张为 $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{B}_+^2$ 上的 σ 有限广义测度. 则 $X(A,\omega)$，$A\in\mathscr{B}_+^2$，$\omega\in\Omega$ 为

所求的． ∎

9.25 引理 设 X 为 Levy 单．对定理 9.24 中定义的随机广义测度 $X(A)$，有

(i) 固定 $A\in\mathscr{B}_b$，$X(A)$ 是随机变量．

(ii) 设 $A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{B}_b$，且互不相交，则 $X(A_1),\cdots,X(A_n)$ 相互独立．

证 记区间 $(r,s]$ $(r,s\in R_-^2,r<s)$ 全体为$\overline{\mathscr{C}}$，$\overline{\mathscr{C}}$的有限不相交并全体为 $\mathscr{R}$．注意，由于 $X(\cdot,\omega)$ 是 σ 有限广义测度，并且 X 随机连续，从而对 $A\in\mathscr{C}$ 成立的 (24.1) 对 $A\in\overline{\mathscr{C}}$也成立．

(i) 设 $\mathscr{G}_1=\{A\in\mathscr{B}_+^2:\forall z\in R_+^2, X(A\cap R_z)$ 是(有限值) 随机变量$\}$．易知 $\mathscr{G}_1$ 是单调类，由(24.1)知 $\mathscr{G}_1$ 含$\overline{\mathscr{C}}$，从而包含由$\overline{\mathscr{C}}$产生的代数$\overline{\mathscr{C}}_1$．由单调类定理，$\mathscr{G}_1$ 含 $\sigma(\overline{\mathscr{C}}_1)=\mathscr{B}_+^2$．

(ii) 设 $A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{R}$，互不相交．由独立独立性易知 $X(A_1),\cdots,X(A_n)$ 相互独立．固定 $A_1,\cdots,A_{n-1}\in\mathscr{R}$．记 $\mathscr{G}_2=\{C\in\mathscr{B}_+^2:$ $X(A_1),\cdots,X(A_{n-1}),X(C\cap R_z-\bigcup_{i=1}^{n}A_i)$ 相互独立，$z\in R_+^2\}$，则 $\mathscr{G}_2$ 是单调类，因而可以推出 $\mathscr{G}_2$ 包含 $\mathscr{B}_+^2$．即 $A_1,\cdots,A_{n-1}\in\mathscr{B}_b$，$C\in\mathscr{B}_b$，它们互不相交，则 $X(A_1),\cdots,X(A_{n-1}),X(C)$ 相互独立．重复上述论证可知对互不相交的 $C_1,\cdots,C_n\in\mathscr{B}_b$，$X(C_1),\cdots,X(C_n)$ 相互独立． ∎

设 $D\in\mathscr{B}_+^2$，$D^c=R_+^2-D$．令

$$\mathscr{G}(D)=\sigma\{X(R_z\cap D),z\in D\},$$

$$\mathscr{G}(D^C)=\sigma\{X(R_z\cap D^c),z\in D^c\}.$$

9.26 引理 $\mathscr{G}(D)$ 与 $\mathscr{G}(D^c)$ 独立．

证 记

$$\psi(D)=\sigma\{X(A):A\in D\cap\mathscr{B}_b\},$$

$$\psi(D^c)=\sigma\{X(A):A\in D^C\cap\mathscr{B}_b\}.$$

设 $A_1,\cdots,A_m\in D\cap\mathscr{B}_b$ 互不相交，$B_1,\cdots,B_n\in D^c\cap\mathscr{B}_b$ 互不相交．由定理 9.25，$X(A_1),\cdots,X(A_m),X(B_1),\cdots,X(B_n)$ 相互独立．如果 $A_1,\cdots,A_m$ 可以相互相交或 $B_1,\cdots,B_n$ 可以相互相交，

总可以取互不相交集 $A'_1, \cdots, A'_l \in D \cap \mathscr{B}_b$，互不相交集 $B'_1, \cdots, B'_k \in D^C \cap \mathscr{B}_b$，使得

$$X(A_i) = f_i[X(A'_1), \cdots, X(A'_l)], 1 \leqslant i \leqslant m,$$
$$X(B_j) = g_j[X(B'_1), \cdots, X(B'_k)], 1 \leqslant j \leqslant n.$$

但 $X(A'_1), \cdots, X(A'_l), X(B'_1), \cdots, X(B'_k)$ 相互独立，从而 $\{X(A_1), \cdots, X(A_m)\}$ 与 $\{X(B_1), \cdots, X(B_n)\}$ 独立. 于是 $\psi(D)$ 与 $\psi(D^C)$ 独立. 注意 $\mathscr{G}(D) \subset \psi(D)$，$\mathscr{G}(D^C) \subset \psi(D^C)$，故得引理结论. ∎

对 $D \in \mathscr{B}^2_+$，引进记号 $\Gamma(D) = \{S: S$ 或者是某个 $R_z(z \in \partial D)$，或者是一个曲边梯形，它以 ∂D 的某一段为曲腰，该腰相对的坐标轴为另一腰，平行于另一坐标轴的两条平行线为底$\}$

下图中阴影部份所示的二个集合就是 $\Gamma(D)$ 的两个典型的集合.

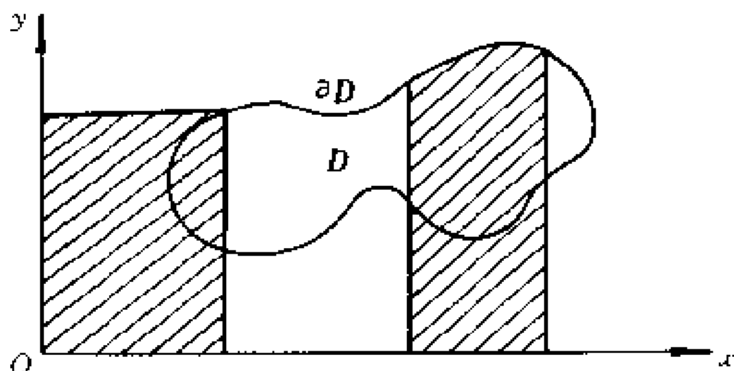


图 5

令　$\mathscr{H} = \sigma\{X(A \cap D^C): A \in \Gamma(D)\}$.

9.27 定理　设 $\mathscr{D} \in \mathscr{B}^2_+$ 有逐段光滑的边界. 则

(i) $\mathscr{G}(D) \subset \mathring{\mathscr{F}}(D)$，$\mathscr{H} \subset \mathscr{G}(D^C) \subset \mathring{\mathscr{F}}(D^C)$，$\mathscr{H} \subset \mathring{\mathscr{F}}(D) \cap \mathring{\mathscr{F}}(D^C)$.

(ii) $\mathring{\mathscr{F}}(D) = \mathscr{G}(D) \vee \mathscr{H} = \mathscr{G}(D) \vee (\mathring{\mathscr{F}}(D) \cap \mathring{\mathscr{F}}(D^C))$，$\mathring{\mathscr{F}}(D^c) = \mathscr{G}(D^c) \vee (\mathring{\mathscr{F}}(D) \cap \mathring{\mathscr{F}}(D^c))$.

证 (i) 对 $z\in D$，由于 $R_z\cap D$ 有逐段光滑边界，故存在一列 $A_n\in\mathscr{R}$，使 $A_n\uparrow R_z\cap D$. 由于 A_n 是顶点全在 D 中的正位矩形之并，故每个 $X(A_n)$ 可表为 D 中点 y 上的 $X(y)$ 值的线性组合，于是 $X(A_n)\in\mathring{\mathscr{F}}(D)$，从而 $X(R_z\cap D)\in\mathring{\mathscr{F}}(D)$，得证 $\mathscr{G}(D)\subset\mathring{\mathscr{F}}(D)$. 类似证 $\mathscr{G}(D^c)\subset\mathring{\mathscr{F}}(D^c)$，$\mathscr{H}\subset\mathring{\mathscr{F}}(D)$，$\mathscr{H}\subset\mathscr{G}(D^c)$.

(ii) 设 $z\in R_+^2$，则 $X(z)=X(R_z\cap D)+X(R_z\cap D^c)$. 对 $z\in D$，显然 $X(R_z\cap D)\in\mathscr{G}(D)$，而 $R_z\cap D^c$ 可表为形如 $A\cap D^c$，$A\in\Gamma(D)$，的有限或可列并，故 $X(R_z\cap D^c)\in\mathscr{H}$. 于是得证 $\mathring{\mathscr{F}}(D)\subset\mathscr{H}\vee\mathscr{G}(D)$. 再由 (i) 得 (ii) 第一式. 往证第二式. 对 $z\in D^c$，$X(R_z\cap D^c)\in\mathscr{G}(D^c)$，而 $R_z\cap D$ 可用一列单调上升的 A_n 逼近，A_n 是形如 R_y 的矩形，$y\in D$，$\rho(y,\partial D)<\frac{1}{n}$，或者，$A_n$ 是对此种矩形经有限多次和、差运算而得的集. 因此，

$$X(R_z\cap D)\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\sigma\left\{X(y):y\in D,\rho(y,\partial D)<\frac{1}{n}\right\}$$
$$\equiv\Sigma^+(\partial D).$$

类似地

$$X(R_z\cap D^c)\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\sigma\left\{X(y):y\in D^c,\rho(y,\partial D)<\frac{1}{n}\right\}$$
$$\equiv\Sigma^-(\partial D).$$

显然，$\Sigma^+(\partial D)\cap\Sigma^-(\partial D)\subset\mathring{\mathscr{F}}(D)\cap\mathring{\mathscr{F}}(D^c)$. 于是 $\mathring{\mathscr{F}}(D^c)\subset\mathscr{G}(D^c)\vee(\mathring{\mathscr{F}}(D)\cap\mathring{\mathscr{F}}(D^c))$. 再由 (i) 知 (ii) 第二式成立. ∎

9.28 定理 设 X 是 Levy 单，$D\in\mathscr{B}_+^2$ 有逐段光滑边界，则

$$(\mathring{\mathscr{F}}(D),\mathring{\mathscr{F}}(D^c)\,|\,\mathring{\mathscr{F}}(D)\cap\mathring{\mathscr{F}}(D^c)).\tag{28.1}$$

证 由引理 9.26，9.27 得

$$(\mathscr{G}(D),\mathscr{G}(D^c)\,|\,\mathscr{G}(D)\cap\mathscr{G}(D^c)).$$

由引理 9.27 有 $\mathscr{H}\subset\mathscr{G}(D^c)$，故

$$(\mathscr{G}(D),\mathscr{G}(D^c)\vee\mathscr{H}\,|\,\mathscr{G}(D)\cap\mathscr{G}(D^c)).$$

由定理 1.37

$(\mathscr{G}(D) \vee \mathscr{H}, \mathscr{G}(D') \mid [\mathscr{G}(D) \cap \mathscr{G}(D')] \vee \mathscr{H})$.

再由引理 9.27 及定理 1.37 得 (28.1). ∎

§ 9.6 Levy 单的局部性质

先叙述一个简单的引理.

9.29 引理 设 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 为独立随机变量和，存在 $c>0$ 及 $0<\alpha<1$ 使对 $1\leqslant k\leqslant n$, $P(\xi_n-\xi_k<-c)<1-\alpha$，则对 $x>0$,

$$P\{\sup_k \xi_k > x+c\} \leqslant \frac{1}{\alpha}P(\xi_n > x).$$

证
$$\begin{aligned}P\{\sup_k \xi_k > x+c\} &= \sum_{i=1}^{n} P\{\xi_k \leqslant x+c, k \leqslant i-1; \xi_i > x+c\} \\ &\leqslant \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n} P\{\xi_k \leqslant x+c, k\leqslant i-1; \xi_i > x+c, \xi_n - \xi_i \geqslant -c\} \leqslant \frac{1}{\alpha}P(\xi_n > x).\end{aligned}$$ ∎

9.30 定理 设 $\varphi(z), z\in R_{(1,1)}$ 是零初值的，连续的，单增的非负函数. 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\alpha(\varepsilon)>0$，使得

$$P\{X(z) < -\varepsilon\varphi(z)\} \leqslant 1-\alpha(\varepsilon), \tag{30.1}$$

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{st}P\{X(s,t) > \varphi(s,t)\}dsdt < \infty. \tag{30.2}$$

则
$$P\{\overline{\lim_{s\downarrow 0, t\downarrow 0}} \frac{X(s,t)}{\varphi(s,t)} \leqslant 1\} = 1.$$

证 由引理 9.29，X 的可分性及 (30.1)，对 $0<a<1$，记 $z_{mn} = (a^m, a^n)$，则

$$\begin{aligned}&P\{\sup_{0\leqslant(s,t)\leqslant z_{mn}} X(s,t) > (1+2\varepsilon)\varphi(z_{mn})\} \\ &\leqslant P\{X(u,v) > (1+\varepsilon)\varphi(z_{mn})\}/\alpha(\varepsilon).\end{aligned}$$

其中 $a^{m+1}<u<a^m$, $a^{n+1}<v<a^n$, 选取 a 充分接近 1，使 $(1+\varepsilon)\varphi(a^m,a^n) > \varphi(a^{m-1},a^{n-1})$，则

$$\left[\int_{a^m}^{a^{m-1}}\int_{a^n}^{a^{n-1}}\left(\frac{P\{X(u,v)>\varphi(u,v)\}}{uv}dudv\right)\right]\Big/[\alpha(\varepsilon)(1-a)^2]$$

$$\geqslant P\{\sup_{0\leqslant(s,t)\leqslant z_{mn}} X(s,t)>(1+2\varepsilon)\varphi(z_{mn})\}. \tag{30.3}$$

从而

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P\{\sup_{0\leqslant(s,t)\leqslant z_{mn}} X(s,t)>(1+2\varepsilon)\varphi(z_{mn})\}$$

$$\leqslant\left[\int_0^1\int_0^1\left(\frac{P\{X(s,t)>\varphi(s,t)\}}{st}dsdt\right)\right]\Big/[\alpha(\varepsilon)(1-a)^2]$$

$$<\infty.$$

由 Borel-Cantelli 引理，以概率 1，从某个 m，n 起，对 $a^{m-1}\leqslant s\leqslant a^m$，$a^{n+1}\leqslant t\leqslant a^n$，有

$$X(s,t)\leqslant(1+2\varepsilon)\varphi(z_{mn})\leqslant(1+2\varepsilon)(1+\varepsilon)\varphi(s,t),$$

所以以概率 1 有

$$\overline{\lim_{s\downarrow 0,t\downarrow 0}}\frac{X(s,t)}{\varphi(s,t)}\leqslant(1+2\varepsilon)(1+\varepsilon).$$

由于 ε 任意，定理得证. ∎

9.31 注 定理 9.30 中用点 (δ,δ) $(\delta>0)$ 代替点 $(1,1)$ 后，定理仍真.

9.32 定理 如果 X 无正跳跃，$EX(z)=0$，则 $P\{X(z)>0\}\geqslant\frac{1}{16}$.

证 设 $Ee^{uX(s,t)}=e^{stV(u)}$，其中 $V(u)=\frac{1}{2}bu^2+\int_{-\infty}^{0}(e^{ux}-1-ux)N(dx)$. 因对 $y\leqslant 0$ 有 $(e^y-1)^2\leqslant 2(e^y-1-y)$，故

$$\begin{aligned}V(2u)&=2bu^2+2\int_{-\infty}^{0}(e^{ux}-1-ux)N(dx)\\&\quad+\int_{-\infty}^{0}(e^{ux}-1)^2N(dx)\\&\leqslant 2bu^2+4\int_{-\infty}^{0}(e^{ux}-1-ux)N(dx)\\&=4V(u).\end{aligned}$$

依柯西不等式

$$\{E[e^{uX(s,t)}I_{[0,\infty)}(X(s,t))]\}^2\leqslant E\{e^{2uX(s,t)}\}P\{X(s,t)>0\},$$

所以

$$P\{X(s,t)>0\}\geqslant\{E[e^{uX(s,t)}I_{(0,\infty)}(X(s,t))]\}^2/Ee^{2uX(s,t)}$$
$$\geqslant[e^{stV(u)}-1]^2/e^{4stV(u)}. \qquad (32.1)$$

因 $V(0)=0, V(+\infty)=+\infty$，故存在 u，使 $e^{stV(u)}=2$，代入(32.1)得证定理. ∎

9.33 定理 如果 X 的变差有界，其累积量为

$$K(u)=iua+\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{iux}-1)N(dx). \qquad (33.1)$$

则
$$P\left\{\lim_{s\downarrow 0,t\downarrow 0}\frac{X(s,t)}{st}=a\right\}=1.$$

证 对每个 $\delta>0$，由定理 9.17 知，以 (33.1) 中的 $K(u)$ 为累积量的 X 可表为

$$X(s,t)=ast+X_\delta^+(s,t)+X_\delta^-(s,t)+\eta_\delta(s,t).$$

其中 X_δ^+，X_δ^- 是独立增量过程，其累积量分别是 $\int_0^\delta(e^{iux}-1)N(dx)$ 和 $\int_{-\delta}^0(e^{iux}-1)N(dx)$；而 $\eta_\delta(s,t)=0$ 对充分小的 s，t. 故为证定理，只需证明：通过选择 $\delta>0$，可以使 $\lim\limits_{s\downarrow 0,t\downarrow 0}X_\delta(s,t)/st$ 任意地小，其中 $X_\delta=X_\delta^+-X_\delta^-$.

令 $\xi_{mn}=2^{m+n}X_\delta(2^{-m},2^{-n})$. 由于对充分小的 s，$t>0$，总存在 m，n 使 $2^{-(m+1)}<s\leqslant 2^{-m}, 2^{-(n+1)}<t\leqslant 2^{-n}$，于是有

$$X_\delta(s,t)/st\leqslant X_\delta(2^{-m},2^{-n})/st\leqslant X_\delta(2^{-m},2^{-n})4/2^{-m-n},$$
$$\overline{\lim_{s\downarrow 0,t\downarrow 0}}X_\delta(s,t)/st\leqslant 4\lim_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}}\xi_{mn}.$$

由于

$$E\{\xi((m,n),(m+1,n+1)]\,|\,\mathring{\mathscr{F}}_{mn}^*\}$$
$$=E\left\{\frac{1}{2}[\xi_{m+1,n+1}+2^{m+n+2}X_\delta((0,2^{-n-1}),(2^{-m-1},2^{-n})])\right.$$
$$-\xi_{m+1,n}-\frac{1}{2}(\xi_{m,n+1}+2^{m+n+1}X_\delta((0,2^{-n-1}),(2^{-m},$$
$$\left.2^{-n})])+\xi_{mn}\,|\,\mathring{\mathscr{F}}_{mn}^*\right\}$$
$$=E\left\{\frac{1}{2}[\xi_{mn}+2^{m+n+2}X_\delta(2^{-m-1},2^{-n})-2^{m+n+2},\right.$$

$$X_\delta(2^{-m-1},2^{-n-1})] - \xi_{m+1,n} - \frac{1}{2}[\xi_{m,n+1} + 2^{m+n+1}$$

$$\cdot X_\delta(2^{-m},2^{-n}) - 2^{m+n+1}X_\delta(2^{-m},2^{-n-1})] + \xi_{mn} | \mathring{\mathscr{F}}^*_{mn}\Big\}$$

$$= E\{2^{m+n+1}X_\delta(2^{-m-1},2^{-n}) - \xi_{mn} - 2^{m+n}X_\delta(2^{-m},2^{-n})$$

$$+ \xi_{mn} | \mathring{\mathscr{F}}^*_{mn}\} = 0,$$

其中 $\mathring{\mathscr{F}}^*_{mn} = \sigma\{\xi_{k,l}: k \leqslant m$ 或 $l \leqslant n\}$. 所以 $\{\xi_{mn}\}$ 是两参数强鞅. 由两参数强鞅理论知极限 $\xi_\infty = \lim\limits_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}}\xi_{mn}$ 存在，且

$$E\xi_\infty \leqslant E\xi_{11} = 4EX_\delta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) - \int_{-\delta}^{\delta}|x|N(dx),$$

于是

$$E \varlimsup_{s\downarrow 0,t\downarrow 0} X_\delta(s,t)/st \leqslant 4\int_{-\delta}^{\delta}|x|N(dx). \tag{33.2}$$

由 $\delta>0$ 的任意性，从 (33.2) 可得证定理. ∎

下面，我们给出定理 9.30 的三种特殊情形.

9.34 定理 如果 X 是 Brown 单，则

$$P\{\varlimsup_{s\downarrow 0,t\downarrow 0} X(s,t)/\sqrt{2st\ln\ln(st)^{-1}} \leqslant 1\} = 1.$$

证 令 $\varphi(s,t) = (1+\varepsilon)\sqrt{2st\ln\ln(st)^{-1}}$. 由于

$$\begin{aligned}
&P\{X(s,t) > \varphi(s,t)\}\\
&= (2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{\varphi(s,t)(st)^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} e^{-x^2/2}dx\\
&\leqslant \sqrt{st}\, e^{-\varphi^2(s,t)/2st}/\sqrt{2\pi}\varphi(s,t)\\
&= [\ln(st)^{-1}]^{-(1+\varepsilon)^2}/\sqrt{4\pi(1+\varepsilon)^2\ln\ln(st)^{-1}}.
\end{aligned} \tag{34.1}$$

所以对充分小的 $\delta>0$,

$$\int_0^\delta\int_0^\delta P\{X(s,t) > \varphi(s,t)\}/st\, dsdt < \infty.$$

而当 $s\to 0$, $t\to 0$ 时

$$P\{X(s,t) < -\varepsilon\varphi(s,t)\} \leqslant st/\varepsilon^2\varphi(s,t) \longrightarrow 0.$$

因此

$$P\{\varlimsup_{s\downarrow 0,t\downarrow 0} X(s,t)/\sqrt{2(1+\varepsilon)^2 st\ln\ln(st)^{-1}} \leqslant 1\} = 1.$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性得证定理结论. ∎

9.35 定理 设 X 的累积量为

$$K(u)=-c|u|^{\alpha}(1+i\omega(u,\alpha)u/|u|). \qquad (35.1)$$

其中 $\alpha\in[1,2)$

$$\omega(u,\alpha)=\begin{cases}\operatorname{tg}(\pi\alpha/2) & ,\alpha\neq 1;\\ (2\ln|u|)/\pi, & \alpha=1.\end{cases}$$

则 $P\{\overline{\lim\limits_{s\downarrow 0,t\downarrow 0}} X(s,t)/\varphi(s,t)\leqslant 1\}=1$,其中

$$\varphi(s,t)=\begin{cases}\alpha(\alpha-1)^{(1-\alpha)/\alpha}(c_1st)^{1/\alpha}[\ln\ln(st)^{-1}]^{(\alpha-1)/\alpha}, & 如 1<\alpha<2;\\ [2cst\ln(st)^{-1}]/\pi, & 如 \alpha=1.\end{cases}$$

而 $c_1=c/|\cos(\pi\alpha/2)|$.

证 先设 $1<\alpha<2$. 则

$$K(u)=-c|u|^{\alpha}\left(\cos\frac{\pi\alpha}{2}+i\frac{u}{|u|}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\right)=-c(iu)^{\alpha}/\cos\frac{\pi\alpha}{2}, \qquad (35.2)$$

所以对 $Reu\geqslant 0$ 有

$$Ee^{uX(s,t)}=e^{c_1stu^{\alpha}}. \qquad (35.3)$$

因对 $Reu\geqslant 0$, (35.3) 右方是解析函数, 我们有

$$P\{X(s,t)>\varphi\}\leqslant(Ee^{uX(s,t)})/e^{u\varphi}=e^{-u\varphi+c_1stu^{\alpha}}$$

设 u_0 是 $-u\varphi+c_1stu^{\alpha}$ 的极大点, 则

$$\begin{aligned}u_0&=[\varphi/(c_1st\alpha)]^{1/(\alpha-1)} \quad -u_0\varphi+c_1stu_0^{\alpha}\\ &=-c_1st\varphi[\varphi/(c_1st\alpha)]^{1/(\alpha-1)}(\alpha-1)/\alpha\\ &=-W(s,t,\varphi),\end{aligned}$$

所以 $P\{X(s,t)>\varphi\}\leqslant e^{-W(s,t,\varphi)}$.

次设 $\alpha=1$. 则

$$Ee^{uX(s,t)}=e^{(2cstu\ln u)/\pi}.$$

设 u_0 是 $-u\varphi+(2cstu\ln u)/\pi$ 的极大点, 即 $u_0=\exp[(\pi\varphi/2cst)-1]$, 并设

$$\begin{aligned}-u_0\varphi+(2cs+u_0\ln u_0)/\pi&=-2cste^{-1+\pi\varphi/2cst}\pi^{-1}\\ &=-W(s,t,\varphi),\end{aligned}$$

则 $P\{X(s,t)>\varphi\}\leqslant e^{-W(s,t,\varphi)}$.

于是，对 $\alpha\in[1,2)$ 及 $\varepsilon>0$，有

$$\int_0^\delta\int_0^\delta (P\{X(s,t)>(1+\varepsilon)\varphi(s,t)\}/st)dsdt<\infty.$$

这里假定 $\varphi(s,t)$ 满足方程

$$W(s,t,\varphi)=\ln\ln(st)^{-1}.$$

由上式求出 $\varphi(s,t)$，利用定理 9.30 即得证定理. ∎

9.36 定理 如果 X 不含高斯分量，则

$$P\{\lim_{s\downarrow 0,t\downarrow 0}|X(s,t)|/\sqrt{st\ln\ln(st)^{-1}}=0\}=1.$$

证 不失一般性，设 X 的方差 $DX(s,t)$ 有穷. 记 $\varphi(s,t)=\sqrt{st\ln|\ln(st)|}$. 因

$$P\{|X(s,t)|>\varepsilon\varphi(s,t)\}\leqslant[DX(s,t)]/\varepsilon^2\varphi^2(s,t)\longrightarrow 0.$$

故由定理 9.30，只需证对 $c<1$ 和一切 $\varepsilon>0$，有

$$\int_0^c\int_0^c(P\{|X(s,t)|>\varepsilon\varphi(s,t)\}/st)dsdt<\infty.$$

设 X' 是与 X 独立同分布的过程，则

$$\begin{aligned}&P\{|X(s,t)-X'(s,t)|>\varepsilon\varphi(s,t)\}\\ \geqslant\ &P\{|X(s,t)|>2\varepsilon\varphi(s,t)\}P\{|X(s,t)|\leqslant\varepsilon\varphi(s,t)\}\\ \geqslant\ &P\{|X(s,t)|>2\varepsilon\varphi(s,t)\}[1-(DX(s,t))/\varepsilon^2\varphi^2(s,t)]\end{aligned}$$

所以可以假定 X 有对称分布，设

$$Ee^{iuX(s,t)}=e^{stK(u)}.$$

其中 $K(u)=\int_0^\infty[\cos(ux)-1]N(dx)$. 把 X 分解成二个独立过程的和：$X=X_1-X_2$，它们的特征函数为

$$Ee^{iuX_1(s,t)}=e^{st\int_0^\delta[\cos(ux)-1]N(dx)}$$

$$Ee^{iuX_2(s,t)}=e^{st\int_\delta^\infty[\cos(ux)-1]N(dx)},$$

其中 $\delta=\delta(s,t)=st/\varphi(s,t)$. 则

$$\begin{aligned}&P\{|X(s,t)|>\varepsilon\varphi(s,t)\}\\ \leqslant\ &P\{|X_1(s,t)|>\varepsilon\varphi(s,t)/2\}+P\{|X_2(s,t)|\\ &>\varepsilon\varphi(s,t)/2\}.\end{aligned}$$

下面证：

$$\int_0^c\int_0^c (P\{|X_k(s,t)| > \varepsilon\varphi(s,t)/2\}/st)dsdt < \infty, k = 1,2.$$

实际上，如设 $u = \Gamma\varphi(s,t)/st$，则对 $k = 1$ 有

$$\begin{aligned}
& P\{|X_1(s,t)| > \varepsilon\varphi(s,t)/2\} \\
&= 2P\{X_1(s,t) > \varepsilon\varphi(s,t)/2\} \\
&\leqslant e^{-\varepsilon u\varphi(s,t)/2} E e^{uX_1(s,t)} \\
&= \exp\{-\varepsilon u\varphi(s,t)/2 + st\int_0^\delta [Ch(ux) - 1]N(dx)\} \\
&\leqslant \exp\{-\varepsilon\Gamma\varphi^2(s,t)/2st \\
&\quad + st\int_0^\delta [Ch(\Gamma\varphi(s,t)x/st) - 1]N(dx) \\
&\leqslant \exp\{-\varepsilon\Gamma\varphi^2(s,t)/st + \Gamma^2\varphi^2(s,t)\int_0^\delta x^2 N(dx)/st\}.
\end{aligned}$$

如取 Γ 满足 $\varepsilon\Gamma/2 = \alpha > 1$，则得

$$P\{|X_1(s,t)| > \varepsilon\varphi(s,t)/2\} = O([\ln(st)^{-1}]^{-\alpha}),$$

所以

$$\int_0^c\int_0^c (P\{|X_1(s,t)| > \varepsilon\varphi(s,t)\}/st)dsdt < \infty.$$

其次

$$\begin{aligned}
& P\{|X_2(s,t)| > \varepsilon\varphi(s,t)/2\} = 2P\{X_2(s,t) > \varepsilon\varphi(s,t)/2\} \\
&\leqslant (4/\varepsilon\varphi(s,t))\int_0^{\varepsilon\varphi(s,t)/2} P\{X_2(s,t) > x\}dx \\
&= (4/\varepsilon\varphi(s,t))\int \{[1 - \cos(u\varphi(s,t)/2)]/u^2\}\{1 - Ee^{iuX_2(s,t)}\}du \\
&\leqslant [\varepsilon\varphi(s,t)/4st]\int \{(1 - \cos[u\varepsilon\varphi(s,t)/2])/u^2\} \cdot \\
&\quad \left\{\int_{x>\delta} (1 - \cos ux)N(dx)\right\}du \\
&= [4st/\varepsilon\varphi(s,t)]\int_\delta^x N(dx)\int (1 - \cos ux) \cdot \\
&\quad [1 - \cos(u\varepsilon\varphi(s,t)/2)]/u^2\, du.
\end{aligned}$$

利用等式 $\int (1 - \cos au)(1 - \cos bu)/u^2\, du = \min\{|a|, |b|\}$，得

$$\begin{aligned}
& P\{|X_2(s,t)| > \varepsilon\varphi(s,t)/2\} \\
&\leqslant [4st/\varepsilon\varphi(s,t)]\int_\delta^\infty N(dx)\min\{|x|, \varepsilon\varphi(s,t)/2\}
\end{aligned}$$

$$= [4st/\varepsilon\varphi(s,t)]\int_{\delta}^{\varepsilon\varphi(s,t)/2} xN(dx) + 2st\int_{\varepsilon\varphi(s,t)/2}^{\infty} N(dx).$$

最后我们注意到

$$\int_0^c\int_0^c [1/\varphi(s,t)]\int_{\delta(s,t)}^1 xN(dx)dsdt$$

$$\leqslant (1/2)\int_0^c\int_0^c\int_{\delta(s,t)}^1 xN(dx)\delta(ds,dt)$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 du\int_u^1 xN(dx) = \left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 x^2N(dx),$$

$$\int_0^c\int_0^c\int_{\varepsilon\varphi(s,t)/2}^1 N(dx)dsdt \leqslant \int_0^1\int_{\sqrt{s}}^1\int_{\sqrt{t}}^1 N(dx)dsdt$$

$$= \iiint_{0<u<x^2<} dsdtN(dx) = \int_0^1 x^2N(dx).$$

定理结论得证. ∎

§ 9.7 广义 Levy 单及其相关随机过程

9.37 定义 称实值随机过程 $X = \{X(z), z \in R_+^2\}$ 为广义 Levy 单，如果对任意 $z = (s,t) \in R_+^2$，

$$X(s,t) = g(s,t)[X_0 + M^1(s) + M^2(t) + M(s,t)] \tag{37.1}$$

其中，g 是定义在 R_+^2 上取值于 $R^1\setminus\{0\}$ 的非随机的函数；M^1，M^2，M 均为零初值独立增量过程；X_0 是实随机变量，且 $\{X_0, M^1, M^2, M\}$ 相互独立.

9.38 定理 设 X 是广义 Levy 单. 则 X 是 $(\mathscr{P}^1, \mathscr{P}^2, \mathscr{P})$ * 马氏过程. 其中，对 x，y，$z \in R^1$，$B \in \mathscr{B}^1$，$(0,0) \leqslant (u,v) < (s,t)$，

$$P(u,v;s-u,t-v;x,y,z,B)$$

$$= P\left\{g(s,t)\left(\frac{y}{g(u,t)} + \frac{z}{g(s,v)} - \frac{x}{g(u,v)} + M((u,v),(s,t)]\right) \in B\right\}, \tag{38.1}$$

$$P^1(u,y;s-u,B)$$

$$= P\left\{g(s,0)\left[\frac{y}{g(u,0)} + M^1(s) - M^1(u)\right] \in B\right\}. \quad (38.2)$$

$$P^2(v,z;t-v,B)$$

$$= P\left\{g(0,t)\left[\frac{z}{g(0,v)} + M^2(t) - M^2(v)\right] \in B\right\}. \quad (38.3)$$

证 简记 $\psi(s,t) = \dfrac{1}{g(s,t)}$.

(i) 往证由 (38.1) 确定的 $\mathscr{P}$ 是三点转移函数族. 只要证明 $\mathscr{P}$ 的水平转移性和竖直转移性即可. 只证前者.

设 $0 \leqslant u < r < s$, $0 \leqslant v < t$, x, y, z, $\xi \in R^1$. 令

$G = g(r,t)\{\psi(u,t)y + \psi(r,v)\xi - \psi(u,v)x + M((u,v),(r,t)]\}$

并记 G 的分布为 P_G. 则 G 与 $M((r,v),(s,t)]$ 独立. 易见

$$M((u,v),(s,t)] = M((u,v),(r,t)] + M((r,v),(s,t)]. \quad (38.4)$$

由关于独立随机变量的 Fubini 定理, 对 $B \in \mathscr{B}^1$, 由 (38.4), 有

$$\begin{aligned}
&P(u,v;s-u,t-v;x,y,z,B) \\
&= P\{g(s,t)(\psi(u,t)y + \psi(s,v)z - \psi(u,v)x \\
&\quad + M((u,v),(s,t)]) \in B\} \\
&= P\{g(s,t)(\psi(r,t)G + \psi(s,v)z - \psi(r,v)\xi \\
&\quad + M((r,v),(s,t)]) \in B\} \\
&= \int_{R^1} P\{g(s,t)(\psi(r,t)\eta + \psi(s,v)z - \psi(r,v)\xi \\
&\quad + M((r,v),(s,t)]) \in B\} P_G(d\eta).
\end{aligned}$$

这样, 由 (38.1) 得

$$\begin{aligned}
&P(u,v;s-u,t-v;x,y,z,B) \\
&= \int P(r,v;s-r,t-v;\xi,\eta,z,B) P(u,v;r-u,t \\
&\quad - v;x,y,\xi,d\eta).
\end{aligned}$$

从而得证 $\mathscr{P}$ 是三点转移函数族.

(ii) 类似可证 $\mathscr{P}^1$, $\mathscr{P}^2$ 是单参数转移函数族.

(iii) 往证 $(\mathscr{P}^1, \mathscr{P}^2, \mathscr{P})$ 是相容族.

设 $0\leqslant u<s$，$v>0$，x，$y\in R^1$. 记 $H=g(s,0)\{\psi(u,0)x+M^1(s)-M^1(u)\}$，并记 P_H 为 H 的分布. 由独立性假定知，H 与 $M((u,0),(s,v)]$ 独立. 故如前述，由（38.1）可得

$$
\begin{aligned}
&P\{g(s,v)(-\psi(u,0)x+\psi(u,v)y+\psi(s,0)H\\
&\quad+M((u,0),(s,v)])\in B\}\\
&=\int P\{g(s,v)(-\psi(u,0)x+\psi(u,v)y+\psi(s,0)\eta\\
&\quad+M((u,0),(s,v)])\in B\}P_H(d\eta)\\
&=\int P(u,0;s-u,v;x,y,\eta,B)P^1(u,x;s-u,d\eta).
\end{aligned}
\tag{38.5}
$$

但容易验证

$$
\begin{aligned}
&-\psi(u,0)x+\psi(u,v)y+\psi(s,0)H+M((u,0),(s,v)]\\
&=\psi(u,v)y+M^1(s)-M^1(u)+M((u,0),(s,v)].
\end{aligned}
$$

此式右方与 x 无关. 从而（38.5）右方与 x 无关. 即 $\mathscr{P}$ 与 $\mathscr{P}^1$ 相容. 类似证 $\mathscr{P}$ 与 $\mathscr{P}^2$ 相容.

(iv) 往证 X 是以（$\mathscr{P}^1$，$\mathscr{P}^2$，$\mathscr{P}$）为转移函数联合族的宽过去马氏过程.

设 $(0,0)\leqslant(u,v)<(s,t)$. 易见

$$
\begin{aligned}
X(s,t)&=g(s,t)\{X_0+M^1(s)+M^2(t)+M(s,t)\}\\
&=g(s,t)\{\psi(u,t)X(u,t)+\psi(s,v)X(s,v)\\
&\qquad-\psi(u,v)X(u,v)+M((u,v),(s,t)]\}.
\end{aligned}
\tag{38.6}
$$

由独立性假设可知，$M((u,v),(s,t)]$ 与 $\mathring{\mathscr{F}}_{uv}(X)$ 独立. 故由 (38.6)，经直接计算可得

$$
\begin{aligned}
&P\{X(s,t)\in B|\mathring{\mathscr{F}}^*_{uv}(X)\}\\
&=P\{g(s,t)(\psi(u,t)X(u,t)+\psi(s,v)X(s,v)\\
&\quad-\psi(u,v)X(u,v)-M((u,v),(s,t)])\\
&\quad\in B|X(u,v),X(u,t),X(s,v)\}\\
&=P(u,v;s-u,t-v;X(u,v),X(u,t),X(s,v),B).
\end{aligned}
$$

因而 X 是宽过去马氏过程，其三点转移函数族是 $\mathscr{P}$.

显然，边际过程 $X^1=\{g(s,0)[X_0+M^1(s)],s\geqslant 0\}$ 和 $X^2=\{g(0,t)[X_0+M^2(t)],t\geqslant 0\}$ 都是单参数马氏过程且分别具有转移函数族 $\mathscr{P}^1$ 和 $\mathscr{P}^2$.

此外，由独立性假设易知，X^1 与 X^2 关于 $X(0,0)=g(0,0)X_0$ 条件独立. 从而由定理 5.8 知 X 是（$\mathscr{P}^1$，$\mathscr{P}^2$，$\mathscr{P}$）宽过去马氏过程.

（V）综上所述，X 是（$\mathscr{P}^1$，$\mathscr{P}^2$，$\mathscr{P}$）$*$ 马氏过程. ∎

下面证明 Levy 单的正切函数与广义 Levy 单的指数函数构成的过程都是具有相容转移函数族的两参数过程，从而是 $*$ 马氏过程.

9.39 定理 设 X 是形如 (37.1) 的 Levy 单，$g(s,t)\equiv 1$. 令 $Y(s,t)=\mathrm{tg}X(s,t)$. 则 $Y=\{Y(z),z\in R_+^2\}$ 是$(\mathscr{P}^1,\mathscr{P}^2,\mathscr{P})$ $*$ 马氏过程. 其中，对 $(0,0)\leqslant(u,v)<(s,t),x,y,z\in R^1,B\in\mathscr{B}^1$,

$$P(u,v;s-u,t-v;x,y,z,B)$$
$$=P\left\{\frac{\phi(x,y,z)+\psi(x,y,z)\mathrm{tg}M((u,v),(s,t)]}{\psi(x,y,z)-\phi(x,y,z)\mathrm{tg}M((u,v),(s,t)]}\in B\right\}. \tag{39.1}$$

这里，$\phi(x,y,z)=y+z+xyz-x,\psi(x,y,z)=1+xy+xz-zy$, 对 $i=1,2$,

$$P^i(u,x;s-u,B)=P\left\{\frac{x+\mathrm{tg}[M^i(s)-M^i(u)]}{1-x\mathrm{tg}[M^i(s)-M^i(u)]}\in B\right\}. \tag{39.2}$$

证 首先注意

$$Y(s,t)=\mathrm{tg}\{X(u,t)+X(s,v)-X(u,v)+M((u,v),(s,t)]\} \tag{39.3}$$

$$Y(s,0)=\mathrm{tg}[X(u,0)+M^1(s)-M^1(u)], \tag{39.4}$$

$$Y(0,t)=\mathrm{tg}[X(0,v),+M^2(t)-M^2(v)]. \tag{39.5}$$

反复应用公式 $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta)/(1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta)$ 可得

$$\mathrm{tg}(b+c-a+\Delta)=\frac{\phi(\mathrm{tg}a,\mathrm{tg}b,\mathrm{tg}c)+\psi(\mathrm{tg}a,\mathrm{tg}b,\mathrm{tg}c)\mathrm{tg}\Delta}{\psi(\mathrm{tg}a,\mathrm{tg}b,\mathrm{tg}c)-\phi(\mathrm{tg}a,\mathrm{tg}b,\mathrm{tg}c)\mathrm{tg}\Delta}. \tag{39.6}$$

由独立性假设知，$\mathrm{tg}M((u,v),(s,t)]$ 与 $\mathring{\mathscr{F}}^{*}_{uv}(Y)$ 独立，从而由(39.3)(39.6)(39.1)有

$$P\{Y(s,t)\in B|\mathring{\mathscr{F}}^{*}_{uv}(Y)\}$$

$$=P\left\{\frac{\phi[Y(u,v),Y(u,t),Y(s,v)]+\psi[Y(u,v),Y(u,t),Y(s,v)]\mathrm{tg}M((u,v),(s,t)]}{\psi[Y(u,v),Y(u,t),Y(s,v)]-\phi[Y(u,v),Y(u,t),Y(s,v)]\mathrm{tg}M((u,v),(s,t)]}\right.$$

$$\left.\in B|\mathring{\mathscr{F}}^{*}_{uv}(Y)\right\}$$

$$=P(u,v;s-u,t-v;Y(u,v),Y(u,t),Y(s,v),B). \qquad (39.7)$$

类似地，可得

$$P\{Y(s,0)\in B|Y(r,0),0\leqslant r\leqslant u\}$$

$$=P\left\{\frac{Y(u,0)+\mathrm{tg}[M^1(s)-M^1(u)]}{1-Y(u,0)\mathrm{tg}[M^1(s)-M^1(u)]}\in B|Y(r,0),0\leqslant r\leqslant u\right\}$$

$$=P^1(u,Y(u,0);s-u,B). \qquad (39.8)$$

$$P\{Y(0,t)\in B|Y(0,h),0\leqslant h\leqslant v\}$$

$$=P^2(v,Y(0,v);t-v,B). \qquad (39.9)$$

又由(39.6)和 $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ 的和角公式容易看出，边际过程 $Y^1=\{Y(s,0),s\geqslant 0\}$ 和 $Y^2=\{Y(0,t),t\geqslant 0\}$ 关于 $Y(0,0)$ 条件独立.

因此，如能证明(39.1)(39.2)确定的 $(\mathscr{P}^1,\mathscr{P}^2,\mathscr{P})$ 是相容的转移函数族，则依定理5.8可得证本定理.

(i) 往证 $\mathscr{P}$ 是三点转移函数族. 对 $0\leqslant u<r<s$，$0\leqslant v<t$，x，y，z，$\xi\in R^1$，令

$$H=\frac{\phi(x,y,\xi)+\psi(x,y,\xi)\mathrm{tg}M((u,v),(s,t)]}{\psi(x,y,\xi)-\phi(x,y,\xi)\mathrm{tg}M((u,v),(r,t)]}$$

若记 P_H 为 H 的分布. 如果能证明

$$\frac{\phi(x,y,z)+\psi(x,y,z)\mathrm{tg}M((u,v),(s,t)]}{\psi(x,y,z)-\phi(x,y,z)\mathrm{tg}M((u,v),(s,t)]}$$

$$=\frac{\phi(\xi,H,z)+\psi(\xi,H,z)\mathrm{tg}M((r,v),(s,t)]}{\psi(\xi,H,z)-\phi(\xi,H,z)\mathrm{tg}M((r,v),(s,t)]}, \qquad (39.10)$$

则仿定理9.38的证明，由(39.1)(39.10)有

$$P(u,v;s-u,t-v;x,y,z,B)$$

$$=P\left\{\frac{\phi(\xi,H,z)+\psi(\xi,H,z)\mathrm{tg}M((r,v),(s,t)]}{\psi(\xi,H,z)-\phi(\xi,H,z)\mathrm{tg}M((r,v),(s,t)]}\in B\right\}$$

$$= \int P\left\{\frac{\phi(\xi,\eta,z) + \psi(\xi,\eta,z)\mathrm{tg}M((r,v),(s,t)]}{\psi(\xi,\eta,z) - \phi(\xi,\eta,z)\mathrm{tg}M((r,v),(s,t)]} \in B\right\} P_H(d\eta)$$

$$= \int P(r,v;s-r,t \quad v;\xi,\eta,z,B)P(u,v;r-u,t-v;x,y,\xi,d\eta).$$

故水平转移性成立. 类似证竖直转移性成立. 从而 $\mathscr{P}$ 是 三点转移函数族.

往证 (39.10). 分别记 (39.10) 右方的分子、分母为 V_1 和 V_2. 简记

$$\lambda = \mathrm{tg}M((u,v),(r,t)], \mu = \mathrm{tg}M((r,v),(s,t)], \tag{39.11}$$

则经直接计算可得

$$\begin{aligned} V_1 &= \phi(\xi,H,z) + \psi(\xi,H,z)\mu \\ &= \frac{A(1-\lambda\mu) + B(\lambda+\mu)}{\psi(x,y,\xi) - \phi(x,y,\xi)\lambda}. \end{aligned} \tag{39.12}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= (1+\xi z)\phi(x,y,\xi) + (z-\xi)\psi(x,y,\xi) \\ &= (1+\xi^2)\phi(x,y,\xi), \\ B &= (1+\xi z)\psi(x,y,\xi) - (z-\xi)\phi(x,y,\xi) \\ &= (1+\xi^2)\psi(x,y,\xi). \end{aligned}$$

故

$$V_1 = \frac{[\phi(x,y,\xi)(1-\lambda\mu) + \psi(x,y,\xi)(\lambda+\mu)](1+\xi^2)}{\psi(x,y,\xi) - \phi(x,y,\xi)\lambda}.$$

类似地可得

$$V_2 = \frac{[\psi(x,y,\xi)(1-\lambda\mu) - \phi(x,y,\xi)(\lambda+\mu)](1+\xi^2)}{\psi(x,y,\xi) - \phi(x,y,\xi)\lambda}$$

所以 (39.10) 右方等于

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \frac{\phi(x,y,z)(1-\lambda\mu) + \psi(x,y,z)(\lambda+\mu)}{\psi(x,y,z)(1-\lambda\mu) - \phi(x,y,z)(\lambda+\mu)} \\ &= \frac{\phi(x,y,z) + \psi(x,y,z)(\lambda+\mu)/(1-\lambda\mu)}{\psi(x,y,z) - \phi(x,y,z)(\lambda+\mu)/(1-\lambda\mu)}. \end{aligned} \tag{39.13}$$

但由(39.11) 和 $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ 的和角公式,有

$$\begin{aligned} \frac{\lambda+\mu}{1-\lambda\mu} &= \mathrm{tg}\{M((u,v),(r,t)] + M((r,v),(s,t)]\} \\ &= \mathrm{tg}M((u,v),(s,t)]. \end{aligned}$$

代入 (39.13) 可见 (39.10) 成立.

(ii) 类似地，易证 $\mathscr{P}^1$，$\mathscr{P}^2$ 是单参数转移函数族. 用类似于上面所用的方法，可得

$$\int P^1(u,x;s-u,d\eta)P(u,0;s-u,t;x,y,\eta,B)$$

$$=P\left\{\frac{y+\operatorname{tg}M^*(u,s,v)}{1-y\operatorname{tg}M^*(u,s,v)}\in B\right\},0\leqslant u<s,v>0. \tag{39.14}$$

其中 $M^*(u,s,v)=M^1(s)-M^1(u)+M((u,0),(s,v)]$. 由于 (39.4) 右方与 x 的选取无关，从而左方亦然，故 $\mathscr{P}$ 与 $\mathscr{P}^1$ 相容. 类似证 $\mathscr{P}$ 与 $\mathscr{P}^2$ 相容. 从而 ($\mathscr{P}^1$，$\mathscr{P}^2$，$\mathscr{P}$) 是相容族. ∎

下面考虑广义 Levy 单的指数函数.

9.40 定理 设 X 是由 (37.1) 确定的广义 Levy 单. 令 $W(s,t)=e^{X(s,t)}$. 则 $W=\{W(z),z\in R_+^2\}$ 是 $(\mathscr{P}^1,\mathscr{P}^2,\mathscr{P})*$ 马氏过程. 其中，对 $(0,0)\leqslant(u,v)<(s,t),x,y,z\in R^1,B\in\mathscr{B}^1$,

$$P(u,v;s-u,t-v;x,y,z,B)$$
$$=P\{x^{g(s,t)/g(u,v)}y^{g(s,t)/g(u,t)}z^{g(s,t)/g(s,v)}e^{g(s,t)M((u,v),(s,t)]}$$
$$\in B\},$$

$$P^1(u,y;s-u,B)=P\{y^{g(s,0)/g(u,0)}e^{g(s,0)[M^1(s)-M^1(u)]}\in B\},$$

$$P^2(v,z;t-v,B)=P\{z^{g(0,t)/g(0,v)}e^{g(0,t)[M^2(t)-M^2(v)]}\in B\}.$$

证 注意到

$$W(s,t)=\exp\left\{g(s,t)\left(\frac{X(u,t)}{g(u,t)}+\frac{X(s,v)}{g(s,v)}-\frac{X(u,v)}{g(u,v)}\right.\right.$$
$$\left.\left.+M((u,v),(s,t))]\right)\right\}$$
$$=[W(u,t)]^{g(s,t)/g(u,t)}[W(s,v)]^{g(s,t)/g(s,v)}$$
$$\cdot[W(u,v)]^{-g(s,t)/g(u,v)}e^{g(s,t)M((u,v),(s,t)]}.$$

用类似于定理 9.38 的证明中的方法可得证本定理. ∎

9.41 注 定理 9.40 可适当地加以推广. 设 X 是广义 Levy 单，f 是 R^1 上严格单调的连续函数，其反函数 f^{-1} 也连续. 令 $W_f(z)=f[X(z)]$. 则类似于定理 9.38 的证明，可得：$W_f=\{W_f(z),z\in R_+^2\}$ 是 $(\mathscr{P}_f^1,\mathscr{P}_f^2,\mathscr{P}_f)*$ 马氏过程. 其中，对 $(0,0)\leqslant$

$(u,v) < (s,t), x, y, z \in D \equiv \{f(x): x \in R^1\}, B \in \mathscr{B}^1 \cap D,$

$$P_f(u,v;s-u,t-v;x,y,z,B)$$
$$= P(u,v;s-u,t-v;f(x),f(y),f(z),f(B)),$$
$$P_f^i(u,x;s-u,B)$$
$$= P^i(u,f(x);s-u,f(B)).$$

10 两参数随机事件流

§10.1 两参数流

本章中，状态空间 E 是非负整数集.

10.1 定义 取值 E 的两参数过程 $X=\{X(z),z\in R_+^2\}$ 称为两参数随机事件流（简称两参数流），如果 X 有零初值，即 $X(z)=0$ 对 $z\in\lambda_0$，而且，X 是矩形增的，即对任意 $0\leqslant z_1<z_2$，以概率 $1,X(z_1,z_2]\geqslant 0$.

10.2 定义 两参数流 X 称为平稳的，如果对任意 $0\leqslant y\leqslant y+z\in R_+^2$ 和 $k\in E$，概率值 $P\{X(y,y+z]=k\}$ 与 y 无关. 记此概率为 $V_k(z)$，并记

$$\psi_k(z)=\sum_{l=k}^{\infty}V_l(z).$$

10.3 定义 两参数流 X 称为无后效的，如果 X 有独立增量.

10.4 定义 设 X 是两参数平稳流，有零初值. 称 $\mu=EX(1,1)$ 为该流的强度.

§10.2 两参数平稳流

本节中，假定 X 为两参数平稳流，且存在 $0<z_0\in R_+^2$，使 $V_0(z_0)\neq 1$. 否则，过程 X 是平凡的.

10.5 引理 设 $e=(a,b)>0$，函数 $f(z)$ 在 $z\in(0,e]$ 上非负，矩形增，$f(e)\neq 0$. 如果对 $z_1=(x_1,y_1),z_2=(x_2,y_2),z_1+z_2$

$\in (0,e]$，有

$$f(x_1, y_1 + y_2) \leqslant f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2), \tag{5.1}$$

$$f(x_1 + x_2, y_1) \leqslant f(x_1, y_1) + f(x_2, y_1). \tag{5.2}$$

则当 $x_1 \to 0+$，$y_1 \to 0+$时，$\dfrac{f(x_1, y_1)}{x_1 y_1}$ 趋于某 $A(0 < A \leqslant \infty)$.

证明不难，略.

10.6 定理 对于两参数平稳流 X，当 $s \to 0+$，$t \to 0+$时，$\dfrac{\psi_1(s,t)}{st}$ 趋于某个 $\lambda(0 < \lambda \leqslant \infty)$.

证 依本节开头的假定，存在 $z_0 = (a, b) > 0$ 使 $\psi_1(z_0) \neq 0$. 显然，$\psi_1(z)$ 在 $(0, z_0]$ 中非负，矩形增. 如 X 在 $(0, s_1] \times (0, t_1 + t_2] \subset (0, z_0]$ 中至少出现一个事件，则在 $(0, s_1] \times (0, t_1]$ 或 $(0, s_1] \times (t_1, t_1 + t_2]$ 中至少出现一个事件. 因此，

$$\psi_1(s_1, t_1 + t_2) \leqslant \psi_1(s_1, t_1) + \psi_1(s_1, t_2) \tag{6.1}$$

同理可证

$$\psi_1(s_1 + s_2, t_1) \leqslant \psi(s_1, t_1) + \psi_1(s_2, t_1). \tag{6.2}$$

然后再用引理 10.5. ∎

10.7 定理 设 X 是两参数平稳流. 则对 $t > 0$，$\lim\limits_{s \to 0+} \dfrac{\psi_1(s,t)}{s} \leqslant \lambda t$.

证 仿定理 10.6 的证明知，对任 $t > 0$，当 $s \to 0+$时，$\dfrac{\psi_1(s,t)}{s}$ 趋于某 $\alpha(0 \leqslant \alpha \leqslant \infty)$. 由 (6.1)(6.2) 易得 $\psi_1(s,t) \leqslant \psi_1\left(s, \dfrac{t}{n}\right) n$，$n = 1, 2, \cdots$. 由定理 10.6 得

$$\lim_{s \to 0+} \frac{\psi_1(s,t)}{s} \leqslant t \lim_{\substack{s \to 0+ \\ n \to +\infty}} \frac{\psi_1\left(s, \dfrac{t}{n}\right)}{s \cdot \dfrac{t}{n}} = \lambda t. \qquad ∎$$

10.8 定理 设 X 是零初值的两参数平稳流. 则对 $0 < (s,t)$，$EX(s,t) = \mu st$.

证 设 $0 < (u,v)$，n 为自然数. 则由假设有

$$EX(nu, v) = E\{X(u,v) + [X(2u,v) - X(u,v)] + \cdots$$

$+[X(nu,v)-X((n-1)u,v)]\}=nEX(u,v).$ (8.1)

对自然数 m，总存在与 m 有关的自然数 n，使 $\frac{n}{m}\leqslant u<\frac{n+1}{m}$，由 X 的矩形增性及 (8.1) 有

$$\frac{m}{n}EX(1,v)\leqslant\frac{1}{m}EX(mu,v)\leqslant\frac{1}{m}EX(n+1,v)$$
$$=\frac{n+1}{m}EX(1,v).$$

令 $m\to\infty$ 得 $EX(u,v)=vEX(u,1)$. 类似地有 $EX(u,v)=uEX(1,v)$. 于是

$$EX(s,t)=sEX(1,t)=stEX(1,1)=\mu st.$$ ∎

10.9 定理 设 X 是两参数零初值平稳流. 则 $\mu\geqslant\lambda$.

证 由定理 10.8 知，$\mu st=\sum_{k=1}^{\infty}kV_k(s,t)\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}V_k(s,t)=\psi_1(s,t)$，再用定理 10.6. ∎

§10.3 两参数平稳无后效流

本节设 X 是两参数平稳无后效流，且对任意的 $0<z$，$\sum_{k=0}^{\infty}V_k(z)=1$. 仿单参数平稳无后效流的推导，易知 $V_0(s,t)=e^{-\lambda st}$，其中常数 $0<\lambda<+\infty$.

10.10 引理 设 $z_0=(a,b)>0$，$f(z)$ 在 $z\in(0,z_0]$ 中非负、矩形增，比值 $\frac{f(x,y)}{xy}$ 在 $(0,z_0]$ 中有界，且

$$f(mx,ny)\leqslant mnf(x,y)+cm^2n^2x^2y^2. \tag{10.1}$$

其中 $c>0$ 为常数，m，n 为自然数，$(nx,ny)\in(0,z_0]$. 则当 $x\to0+$，$y\to0+$ 时，$\frac{f(x,y)}{xy}$ 趋于某极限 β，$0\leqslant\beta<\infty$.

证 设 $0<z=(s,t)<z_0$，令 $x=\frac{s}{m}$，$y=\frac{t}{n}$. 由 (10.1) 有

$$f(s,t)\leqslant mnf\left(\frac{s}{m},\frac{t}{n}\right)+c(st)^2,$$

$$\frac{f\left(\frac{s}{m},\frac{t}{n}\right)}{\frac{s}{m}\cdot\frac{t}{n}} \geqslant \frac{f(s,t)}{st} - cst. \tag{10.2}$$

设 $\beta = \varlimsup\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}} \frac{f(x,y)}{xy}$，则 $0 \leqslant \beta < \infty$. 对任意 $\varepsilon > 0$，选 $s,t \in \left[0,\sqrt{\frac{\varepsilon}{c}}\right]$，使 $f(s,t)/st > \beta - \varepsilon$. 设 $0 < (x,y) < (s,t)$，则存在 m，n 使 $\frac{s}{m} \leqslant x < \frac{s}{m-1}$ $\frac{t}{n} \leqslant y < \frac{t}{n-1}$. 由矩形增性和 (10.2)，当 (x, y) 充分接近 0 时，

$$\begin{aligned}\frac{f(x,y)}{xy} &\geqslant \frac{f\left(\frac{s}{m},\frac{t}{n}\right)}{\frac{s}{m-1}\cdot\frac{t}{n-1}} \\ &= \frac{(m-1)(n-1)}{mn}\cdot\frac{f\left(\frac{s}{m},\frac{t}{n}\right)}{\frac{st}{mn}} \\ &\geqslant \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{f(s,t)}{st} - cst.\end{aligned}$$

令 m，$n\to\infty$，并注意 $\varepsilon>0$ 任意，故 $\varliminf\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}} \frac{f(x,y)}{xy} \geqslant \beta$. 所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}} \frac{f(x,y)}{xy} = \beta$. ∎

10.11 定理 设 X 是两参数平稳无后效流. 对 $k>0$，极限 $\lim\limits_{\substack{s\to 0+\\ t\to 0+}} \frac{\psi_k(s,t)}{st}$ 存在，记为 λ_k.

证 当 $k=1$ 时，结论显然. 下面设 $k>1$. 对 $z_0=(a,b)>0$，$\psi_k(z)$ 在 $(0,z_0]$ 中非负，矩形增. 由 $\psi_k(z)\leqslant\psi_1(z)$ 及 $\frac{\psi_1(s,t)}{st}\to\lambda$ $(s,t\to 0)$ 推知：$\frac{\psi_k(s,t)}{st}$ 在 $(s,t)\in(0,z_0]$ 中有界，记 g_k 为其上界，并记 $A_k=\sum\limits_{l=1}^{k-1} g_l g_{k-l}$. 则对一切 $n\geqslant 1$，当 $(s,nt)\in(0,z_0]$ 时，

有

$$\psi_k(s,nt)\leqslant n\psi_k(s,t)+\frac{n(n-1)}{2}A_k(st)^2, \qquad (11.1)$$

实际上，$n=1$ 时显然. 设 n 时成立，则

$$\psi_k(s,(n+1)t)\leqslant\sum_{l=0}^{k}\psi_l(s,t)\psi_{k-l}(s,nt)$$

$$\leqslant\psi_k(s,nt)+\psi_k(s,t)+\sum_{l=1}^{k-1}\psi_l(s,t)\psi_{k-l}(s,nt)$$

$$\leqslant(n+1)\psi_k(s,t)+\frac{n(n+1)}{2}A_k(st)^2.$$

即（11.1）对 $n+1$ 也成立. 与（11.1）对称地有

$$\psi_k(ms,t)\leqslant m\psi_k(s,t)+\frac{m(m-1)}{2}A_k(st)^2,$$

所以有当 $(ms,nt)\in(0,z_0]$ 时，

$$\psi_k(ms,nt)\leqslant n\left[m\psi_k(s,t)+\frac{m(m-1)}{2}A_k(st)^2\right]$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}A_k(st)^2$$

$$\leqslant mn\psi_k(s,t)+\frac{m^2n^2}{2}A_k(st)^2.$$

利用引理 10.10 即可. ∎

10.12 定理 设 X 是两参数平稳无后效流，$k>0$，$t>0$. 则 $\lim\limits_{s\to0+}\dfrac{\psi_k(s,t)}{s}=\lambda_k t$.

证 由平稳无后效性，对任意自然数 n，k 及数 $s>0$，

$$\psi_k(s,(n+1)t)=\sum_{m=k}^{\infty}\sum_{l=0}^{m}V_l(s,t)V_{m-l}(s,nt)$$

$$=\sum_{l=0}^{k-1}V_l(s,t)\psi_{k-l}(s,nt)+\psi_k(s,t)$$

$$\geqslant e^{-\lambda st}\psi_k(s,nt)+\psi_k(s,t). \qquad (12.1).$$

用归纳法可证明

$$\psi_k(s,nt)\geqslant n\left(1-\frac{n-1}{2}\lambda st\right)\psi_k(s,t). \qquad (12.2)$$

实际上，$n=1$ 时，（12.2）显然. 设 n 时成立，则由（12.1）（12.2）得

$$\psi_k(s,(n+1)t) \geqslant e^{-\lambda st}n\left(1-\frac{n-1}{2}\lambda st\right)\psi_k(s,t)+\psi_k(s,t)$$
$$\geqslant (n+1)\left(1-\frac{n}{2}\lambda st\right)\psi_k(s,t).$$

故由（11.1）（12.2）有

$$t\cdot\frac{\psi_k\left(s,\frac{t}{n}\right)}{s\cdot\frac{t}{n}}\left(1-\frac{1-\frac{1}{n}}{2}\lambda s\right)\leqslant\frac{\psi_k(s,t)}{s}$$
$$\leqslant\frac{t\psi_k\left(s,\frac{t}{n}\right)}{s\cdot\frac{t}{n}}+\frac{1-\frac{1}{n}}{2}A_kst^2.$$

由上式及定理 10.11 得证定理. ∎

10.13 求解 $V_k(s,t)$.

任取正整数 k，令

$$p_k=\lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 1}}\frac{V_k(s,t)}{\psi_1(s,t)}=\frac{\lambda_k-\lambda_{k-1}}{\lambda},$$

则对任 $t>0$，

$$\lim_{s\to 0}\frac{V_k(s,t)}{s}=\lambda p_k t.$$

比值 $V_k(s,t)/\psi_1(s,t)$ 是在某区间$((a,b),(a,b)+(s,t)]$中已出现事件的条件下，出现 k 个事件的条件概率. 该比值当 $s,t\to 0$ 时的极限 p_k，可以看作是在某确定的点 (a,b) 已出现事件的条件下，于该点恰发生 k 个事件的条件概率. 下面对两参数平稳无后效流 X，求出 $V_k(s,t)$ 的一般形式.

(i) 由于对 $s>0$、$t>0$，$\tau>0$ 及自然数 k，

$$V_k(s+\tau,t)=\sum_{l=0}^{k}V_l(\tau,t)V_{k-l}(s,t).$$

因当 $\tau\to 0$ 时 $V_0(\tau,t)=1-\lambda t\tau+o(\tau)$，故当 $k>0$ 时

$$\frac{V_k(s+\tau,t)-V_k(s,t)}{\tau}$$
$$=-\lambda tV_k(s,t)+\sum_{i=1}^{k}\frac{V_i(\tau,t)}{\tau}V_{k-i}(s,t)+o(\tau).$$

令 $\tau \to 0$，得 $\frac{\partial V_k(s,t)}{\partial s}$ 存在，且

$$\frac{\partial V_k(s,t)}{\partial s} = -\lambda t V_k(s,t) + \sum_{i=1}^{k} \lambda t p_i V_{k-i}(s,t), k > 0.$$

(13.1)

再加上明显的关系式

$$\frac{\partial V_0(s,t)}{\partial s} = -\lambda t V_0(s,t). \tag{13.2}$$

利用(13.1)(13.2) 可以解出 $V_k(s,t)$. 为此，令 $U_k(s,t) = e^{\lambda st} V_k(s,t)$，则(13.1) 化为

$$\frac{\partial U_k(s,t)}{\partial s} = \lambda t \sum_{i=1}^{k} p_i U_{k-i}(s,t), k = 1,2,\cdots$$

由此可递推地决定 $U_k(s,t)$，因而 $V_k(s,t)$. 例如，由 $U_0(s,t) \equiv 1$ 得

$$\frac{\partial U_1(s,t)}{\partial s} = \lambda t p_1.$$

从而有 $U_1(s,t) = \lambda st p_1, V_1(s,t) = \lambda st p_1 e^{-\lambda st}$，….

(ii) 用母函数方法求解 $V_k(s,t)$ 将更为简单. 令

$$F(s,t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(s,t) x^k. \tag{13.3}$$

以 x^k 乘 (13.1)（当 $k=0$ 时乘 (13.2))，并对 k 求和得

$$\frac{\partial F(s,t,x)}{\partial s} = -\lambda t(1 - \sum_{l=1}^{\infty} p_l x^l) F(s,t,x).$$

令 $\phi(x) = \sum_{l=1}^{\infty} p_l x^l$. 因对任 t, x 有 $F(0,t,x) = V_0(0,t) = 1$，故对 s 求积分得

$$F(s,t,x) = e^{\lambda st(\phi(x)-1)}. \tag{13.4}$$

由 (13.3)，$F(s,t,1) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(s,t) = 1$，故由 (13.4) 得

$$\phi(1) = \sum_{l=1}^{\infty} p_l = 1. \tag{13.5}$$

这样，对两参数平稳无后效流，母函数 (13.3) 的 $F(s,t,x)$ 具有形式 (13.4)，其中 $\lambda > 0$，$\phi(x) = \sum_{l=1}^{\infty} p_l x^l$，而 $p_l \geq 0$，$\sum_{l=1}^{\infty} p_l$

$=1$.

往证其逆：设 λ，p_l，$l\geqslant 1$ 满足上述要求．则存在两参数平稳无后效流，其母函数由（13.4）给出．

假定 X^* 是 Poisson 单：它是零初值独立增量过程，且在 $((a,b),(a,b)+(s,t)]$ 中出现 k 个事件的概率为

$$V_k^*(s,t)=e^{-\lambda st}\frac{(\lambda st)^k}{k!}. \tag{13.6}$$

Poisson 单在事件发生的点上只出现一个事件．但两参数流本身一般来说未必是 Poisson 单，因为我们容许在事件发生的点上以正概率出现多于一个事件．设出现 l 个事件的概率为 p_l $(l=1,2,\cdots)$，它不依赖于给定的出现事件的点，以及流在此点以前的演变．由此，我们可以根据 Poisson 单 X^* 构造一个两参数流 X．下面证 X 的母函数由（13.4）给出．

在每个出现事件的点上出现的事件数是随机变量，它取值 l 的概率为 p_l，$l=1,2,\cdots$，母函数为 $\phi(x)=\sum_{l=1}^{\infty}p_lx^l$．任取 r 个不同的出现事件的点，且以 $p_l(k)$ 表示在这 r 个点上一共出现 k 个事件的概率，其母函数为 $\sum_{k=0}^{\infty}p_l(k)x^k$．由于在诸事件点上出现的事件数相互独立，故

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_l(k)x^k=[\phi(x)]^l.$$

另一方面，由流 X 与 poisson 单 X^* 的关系，有

$$V_k(s,t)=\sum_{l=0}^{\infty}p_l(k)V_l^*(s,t).$$

由此及（13.6）得（13.4）． ∎

综上述，我们有

10.14 定理 设 X 是两参数平稳无后效流，则其母函数（13.3）有形式（13.4），其中

$$\lambda>0,p_l\geqslant 0(l=1,2,\cdots),\sum_{l=1}^{\infty}p_l=1,\phi(x)=\sum_{l=1}^{\infty}p_lx^l. \tag{14.1}$$

反之，设（14.1）成立，则存在两参数平稳无后效流 X，其母函数有形式（13.4）.

10.15 定理 设 X 为两参数平稳无后效流. 则 X 为 Poisson 单的充要条件是 $\mu=\lambda$. 否则，$\mu>\lambda$.

证 由定理 10.8 和定理 10.14，

$$\mu = EX(1,1) = \sum_{k=0}^{\infty} kV_k(1,1)$$
$$= \lambda(p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots),$$

故 $\mu=\lambda \Leftrightarrow p_1=1$，$p_k=0$ $(k\geq 2)$. 由 10.13 (ii)，这等价于 $X=X^*$，即 X 是 Poisson 单. 由定理 10.9，如 $\mu\neq\lambda$，必定 $\mu>\lambda$. ∎

11 Poisson 单和广义 Poisson 单

Poisson 单即两参数 Poisson 过程，是一种特殊情形的两参数独立增量过程，也是两参数马氏过程的一种最基本、最典型的状态离散的过程. 广义 Poisson 单是 Poisson 单的推广. 本章中，我们就广义 Poisson 单进行叙述，状态空间 E 是非负整数集. Poisson 单是广义 Poisson 单的特殊情形.

§ 11.1 广义 Poisson 单

11.1 定义 设 $X = \{X(z), z \in R_+^2\}$ 是取非负整数值的随机过程. 称 X 为广义 Poisson 单，如果下面的 (i) — (iii) 满足：

(i) 零初值，即 $X(z) = 0, z \in \lambda_0$.

(ii) 独立增量. 即对任意的 $0 \leqslant s_1 < \cdots < s_m, 0 \leqslant t_1 < \cdots t_n$，记 $z_{ij} = (s_i, t_j)$，诸增量 $X(z_{ij}, z_{i+1,j+1}]$ $(1 \leqslant i < m, 1 \leqslant j < n)$ 相互独立.

(iii) 广义 Poisson 性，即对 $z_1 \leqslant z_2$，$z_i \in R_+^2$，

$$P\{X(z_1, z_2] = k\} = \frac{e^{-F(z_1, z_2]}(F(z_1, z_2])^k}{k!}, k \in E. \tag{1.1}$$

其中，测度 $F \in m$；而

$$m = \{F(A), A \in \mathscr{B}_+^2 : F \text{ 是 } L\text{-}S \text{ 测度}, F(\lambda_0) = 0, \text{对 } z_1 < z_2,$$
$$\text{有 } 0 < F(z_1, z_2] < \infty, F(z) \equiv F(0, z] \text{ 是 } z \in R_+^2 \text{ 上的连续函数.}\}$$

测度 F 称为广义 Poisson 单的强度测度，$F(z)$ 为强度函数. 特

别地，当 $F(dz)=\lambda dz(\lambda>0$ 为常数）时，广义 Poisson 单 X 称为 Poisson 单，λ 称为 Poisson 单的参数.

由于定义 11.1 (i)，显然，矩形增量 $X(0,z]=X(z)$.

§11.2 广义 Poisson 单的基本性质

11.2 性质 $EX(z)=F(z),E[X(z)]^2=[F(z)+1]F(z)$.

证明显然. ∎

11.3 性质 对 $z_1\leqslant z_2$，有 $X(z_1)\leqslant X(z_2),a.s.$

证 设 $z_1\leqslant z_2$. 令

$$\left.\begin{array}{l}A_1=[0,z_1],A_2=(0\otimes z_1,z_1\otimes z_2],A_3=(z_1,z_2],\\ A_4=(z_1\otimes 0,z_2\otimes z_1],A=A_2\cup A_3\cup A_4.\end{array}\right\}\quad(3.1)$$

则 $[0,z_2]=[0,z_1]\cup A$，故

$$\begin{aligned}X(z_2)&=X(z_1)+X(A)\\&=X(z_1)+X(A_2)+X(A_3)+X(A_4),\end{aligned}\quad(3.2)$$

而由定义 11.1 (iii)，X 的矩形增量 $X(A_i)\geqslant 0$，$a.\ s.$，故 $X(z_2)\geqslant X(z_1),a.s.$ ∎

11.4 性质 广义 Poisson 单是随机连续的，因而是 Levy 单.

证 设 $z_1,\ z_2\in R_+^2$，令 $y=z_1\wedge z_2$. 则

$$\begin{aligned}E|X(z_1)-X(z_2)|&\leqslant E|X(z_1)-X(y)|+E|X(z_2)-X(y)|\\&=E[X(z_1)-X(y)]+E[X(z_2)-X(y)].\end{aligned}\quad(4.1)$$

由性质 11.2，上式右方等于 $F(z_1)-F(y)+F(z_2)-F(y)$. 由于 $F(z)$ 连续，故当 $z_1\to z_2$ 时，必定 $y\to z_2$，因而 (4.1) 右方趋于 0，从而 $X(z_1)\xrightarrow{L^1}X(z_2)$，更有 $X(z_1)\xrightarrow{P}X(z_2)$. ∎

由于性质 11.4，依照 §1.1 末，我们可以假定广义 Poisson 单 X 是完全可分的，可测的. 今后我们恒作此假定.

依定理 9.24，可以假定对一切 ω，存在唯一的 σ 有穷广义测度 $X(A,\ \omega)$，$A\in\mathscr{B}_b$，而当 $A=(z_1,\ z_2]$ 时，$X(A,\omega)$ 与矩形增

量 $X(z_1,z_2]$ 以概率 1 相等. 由定义 11.1(i), $X(\lambda_0)=0$, 从而 $X[0,z]=X[0,z]$. 由独立增量性及 (1.1), 我们可以得: 对有界 Borel 集 $A\subset R_+^2$, 有

$$P\{X(A)=k\}=e^{-F(A)}\frac{[F(A)]^k}{k!}, k\in E. \tag{4.2}$$

11.5 性质 设 $z_i\in R_+^2$, $i=1,2$, $z_1<z_2$, 则对任意正整数 n,

$$\lim_{z_1\to z_2}\frac{P\{X(z_2)-X(z_1)\geqslant n\}}{[F(z_2)-F(z_1)]^n}=\frac{1}{n!}. \tag{5.1}$$

证 用 (3.1) 中的记号. 由 (4.2), $X(A_i)$ 有以 $F(A_i)$ 为参数的 Poisson 分布, $X(z_2)-X(z_1)=X(A)$ 有 Poisson 分布, 参数为 $F(A)=F(z_2)-F(z_1)$, 即

$$\begin{aligned}&P\{X(z_2)-X(z_1)=k\}\\&=e^{-[F(z_2)-F(z_1)]}\frac{[F(z_2)-F(z_1)]^k}{k!}, k\in E.\end{aligned} \tag{5.2}$$

由于 $F(z)$ 连续, 当 $z_1\to z_2$ 时, $F(A)\to 0$, 故由上式得

$$\begin{aligned}&P\{X(z_2)-X(z_1)\geqslant n\}\\&=e^{-F(A)}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{[F(A)]^k}{k!}\\&=e^{-F(A)}\frac{[F(A)]^n}{n!}+o([F(A)]^{n+1}).\end{aligned}$$

由此得 (5.1) ∎

11.6 性质 (单跳性) 设 $z_i\in R_+^2$, $i=1,2$, $z_1\leqslant z_2$. 则

$$\lim_{z_1\to z_2}\frac{P\{X(z_2)-X(z_1)\geqslant 2\}}{P\{X(z_2)-X(z_1)=1\}}=0. \tag{6.1}$$

证 由 (5.2), 上式左方极限等于

$$\lim_{z_1\to z_2}\frac{1-e^{-F(A)}-e^{-F(A)}F(A)}{e^{-F(A)}F(A)}=0.$$ ∎

11.7 性质 $\{X(z)-F(z), z\in R_+^2\}$ 关于 $\{\mathring{\mathscr{F}}_z, z\in R_+^2\}$ 为强鞅.

证 设 $z_1<z_2$, 由独立增量性,

$$E\{X(z_1,z_2]\,|\,\mathring{\mathscr{F}}^*_{z_1}\}=EX(z_1,z_2]=F(z_1,z_2].$$

由此得强鞅结论. ∎

11.8 定理 (Kolmogorov 0—1 律) 设序列 $D_m \in \mathscr{B}^2_+$, $D_m \downarrow \phi$. 如果 $A \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathring{\mathscr{F}}(D_m)$, 则 $P(A)=0$ 或 1.

证 设 B 为 R^2_+ 中 Borel 集且 $|B|<\infty$. 由于 $F(B-D_m)\to F(B)$, 故 $X(B) \xlongequal{L^2} \lim\limits_{m\to\infty} X(B-D_m)$ 与 $\bigcap_{m=0}^{\infty} \mathring{\mathscr{F}}(D_m)$ 相互独立. 故 $X(B)$ 与 A 独立. 由于 B 任意, 故 A 与 $\mathring{\mathscr{F}}_\infty = \bigvee_{z\in R^2_+} \mathring{\mathscr{F}}_z$ 独立. 从而 A 与自身独立, 于是 $P(A)=0$ 或 1. ∎

由性质 11.4 和可分性立即得

11.9 性质 以概率 1, X 在固定点 $z\in R^2_+$ 连续.

这说明, 对 $z\in R^2_+$, 对几乎一切 $\omega\in\Omega$, 存在 z 的 δ 邻域 $u(z,\delta)$ 使当 $z'\in u(z,\delta)$ 时, $X(z',\omega)=X(z,\omega)$. 又由于 $E(|X(z)|\log^+|X(z)|)\leqslant E|X(z)|^2<\infty$, 由两参数鞅的 Bakry 定理2.26, X 有右连左极修正. 因此, 今后我们总设广义 Poisson 单 X 是 Borel 可测的, 完全可分的, 右连左极的.

11.10 性质 设 $Y(z)=X(z)-F(z)$. 则 $Y=\{Y(z),z\in R^2_+\}$ 是局部平方可积鞅, 与 Y 相联系的增过程是 $\langle Y\rangle_z=F(z)$.

证 由性质 11.1, $EY(z)=0$, $E[Y(z)]^2=F(z)<\infty$. 由性质 11.2 知 Y 是局部平方可积鞅.

为证 $\langle Y\rangle_z=F(z)$, 只要证 $[Y(z)]^2-F(z)$, $z\in R^2_+$ 是鞅. 实际上, Y 也具有独立增量. 设 $z_1<z_2$, 用 (3.1) 中的记号 A, 有

$$
\begin{aligned}
& E\{[Y(z_2)]^2-F(z_2)\,|\,\mathring{\mathscr{F}}_{z_1}\} \\
&= E\{[Y(z_2)]^2\,|\,\mathring{\mathscr{F}}_{z_1}\}-F(z_2) \\
&= E\{[Y(z_1)]^2-2Y(z_1)Y(A)+[Y(A)]^2\,|\,\mathring{\mathscr{F}}_{z_1}\}-F(z_2) \\
&= [Y(z_1)]^2+F(A)-F(z_2) \\
&= [Y(z_1)]^2-F(z_1).
\end{aligned}
$$
∎

§ 11.3　Poisson 单的等价定义

11.11 定理　设随机事件在 R_+^2 中发生，以 $X(z)$ 表示在 R_z 中出现的事件的个数. 则 $X = \{X(z), z \in R_+^2\}$ 是 Poisson 单的充要条件是

(i) X 有独立增量.

(ii) X 在 $A = ((a,b),(a,b)+(s,t)]$ 中出现 k 个事件的概率 $P\{X(A)=k\}$ 只与 (s, t) 有关，而与 (a, b) 无关，记此概率为 $V_k(s,t)$. $V_0(s,t) \not\equiv 0, V_0(s,t) \not\equiv 1, \sum\limits_{k=0}^{\infty} V_k(s,t) = 1$.

(iii) X 在 A (同 (ii)) 中至少出现两个事件的概率 $\psi(s,t)$(即 $P\{X(A) \geqslant 2\}$) 是关于 st 的高阶无穷小，即

$$\lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}} \frac{\psi(s,t)}{st} = 0.$$

(iv) 零初值，即 $X(z) = 0, z \in \lambda_0$.

证　必要性易得. 下证充分性.

由 (i)(ii)，容易得出 $V_0(1,1) = \left[V_0\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\right]^{mn}$，从而 $V_0\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right) = \theta^{\frac{1}{mn}}$，其中 $0 \leqslant \theta = V_0(1,1) \leqslant 1$. 由此易得

$$V_0(s,t) = \theta^{st}. \tag{11.1}$$

$\theta = 0$ 时，$V_0(s,t) \equiv 0$；$\theta = 1$ 时，$V_0(s,t) \equiv 1$；均与(ii) 冲突. 故存在正数 $\lambda > 0$ 使 $\theta = e^{-\lambda}$，从而由(11.1)，

$$V_0(s,t) = e^{-\lambda st}. \tag{11.2}$$

为计算 $V_k(s,t)$. 将 $B = ((0,0), (s, t)]$ 分为 n^2 等分，$n > \sqrt{k}$. 令 $A_1 = \{$在 B 的某 k 个子矩形中各恰出现一个事件，而其余 $n^2 - k$ 个子矩形中均不出现事件$\}$，$A_2 = \{$在 B 的 n^2 个子矩形中，至少有一个出现至少两个事件$\}$. 于是

$$V_k(s,t) = P(A_1) + P(A_2, \text{在 } B \text{ 中出现 } k \text{ 个事件}), \tag{11.3}$$

显然 $P(A_1) = C_{n^2}^k\left[V\left(\frac{s}{n},\frac{t}{n}\right)\right]^k\left[V_0\left(\frac{s}{n},\frac{t}{n}\right)\right]^{n^2-k}$. 由 (11.2) 及 (iii) 知：当 $n\to\infty$ 时

$$\left[V_0\left(\frac{s}{n},\frac{t}{n}\right)\right]^{n^2-k} = e^{-\lambda st} + [1+o(1)],$$

$$\left[V_1\left(\frac{s}{n},\frac{t}{n}\right)\right]^k = \left(\frac{\lambda st}{n^2}\right)^k[1+o(1)],$$

$$P(A_1) \longrightarrow e^{-\lambda st}\frac{(\lambda st)^k}{k!}. \tag{11.4}$$

由 (iii)，$P(A_2)\leqslant n^2\psi\left(\frac{s}{n},\frac{t}{n}\right)\longrightarrow 0$. 于是，从 (11.3) 得 $V_k(s,t) = e^{-\lambda st}\frac{(\lambda st)^k}{k!}$ ∎

11.12 定理 在定理 11.11 中，条件 (i) (ii) (iv) 保留，条件 (iii) 改为

(iii′) $\displaystyle\lim_{\substack{s\to 0\\ t\to 0}}\frac{P\{X(s,t)>1\}}{P\{X(s,t)=1\}} = 0.$

定理 11.11 的结论仍成立.

证 仿定理 11.11 证明. ∎

11.13 定理 在定理 11.11 中，条件 (i) (ii) (iv) 下，条件 (iii) 改为：

(iii″) 对任意 $s>0$, $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\psi(s,t)}{t} = 0.$

定理 11.11 的结论仍成立.

证 必要性易证，下证充分性. 仿定理 11.11 的证明有 $V_0(s,t) = e^{-\lambda st}$. 而对 $k\geqslant 1$，有

$$\begin{aligned} V_k(s,t+\tau) = {} & V_k(s,t)V_0(s,\tau) - V_{k-1}(s,t)V_1(s,\tau) \\ & + \sum_{l=2}^k V_{k-l}(s,t)V_l(s,\tau). \end{aligned} \tag{13.1}$$

令 $\tau\to 0$ 时，有

$$V_0(s,\tau) = 1-\lambda s\tau + o(\tau),$$

$$V_1(s,\tau) = \lambda s\tau + o(\tau),$$

$$\sum_{l=2}^k V_{k-l}(s,t)V_l(s,\tau)\leqslant\psi(s,\tau) = o(\tau).$$

故由（13.1），当 $\tau\to 0$ 时，

$$V_k(s,t+\tau)=(1-\lambda s\tau)V_k(s,t)+\lambda s\tau V_{k-1}(s,t)+o(\tau),$$

从而

$$\frac{\partial V_k(s,t)}{\partial t}=\lambda s[V_{k-1}(s,t)-V_k(s,t)] \qquad (13.2)$$

如令 $V_{-1}(s,t)\equiv 0$，则上式对 $k=0$ 也成立.

令母函数 $F(s,t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^k V_k(s,t)$，则由（13.2）易得

$$\frac{\partial F(s,t,x)}{\partial t}=\lambda(x-1)F(s,t,x).$$

加上初始条件 $F(s,0,x)=V_0(s,0)\equiv 1$，解得

$$F(s,t,x)=e^{-\lambda st(1-x)}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\lambda st}\frac{(\lambda st)^k}{k!}x^k,$$

所以

$$V_k(s,t)=e^{-\lambda st}\frac{(\lambda st)^k}{k!},k=0,1,2,\cdots \qquad (13.3) \blacksquare$$

11.14 定理 对于零初值的右连续过程 X，下列三条件相互等价：

(i) X 是 Poisson 单.

(ii) 对任意实数 a 及 z_1，$z_2\in R_+^2$，$z_1<z_2$，记 $A=(z_1,z_2]$，$X(A)$ 的条件特征函数.

$$E\{e^{iaX(A)}|\overset{\circ}{\mathscr{F}}{}^*_{z_1}\}=\exp\{\lambda|A|(e^{ia}-1)\}. \qquad (14.1)$$

其中 $|A|$ 表示 A 的面积.

(iii) a，z_1，z_2，A 同 (ii)，$X(A)$ 的条件特征函数

$$E\{e^{iaX(A)}|\bigcap_{z>z_1}\overset{\circ}{\mathscr{F}}{}^*_z\}=\exp\{\lambda|A|(e^{ia}-1)\}. \qquad (14.2)$$

证 (i) $\Rightarrow$ (ii) 由 X 的独立增量性易得.

(ii)$\Rightarrow$(iii) 设 $z_1=(u,v)$，$z_2=(s,t)$，$y_n=\left(u+\frac{1}{n},\ v+\frac{1}{n}\right)<(s,t)$. 由 (ii)，

$$A_n\equiv E\{e^{iaX(A)}|\overset{\circ}{\mathscr{F}}{}^*_{y_n}\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \exp\left\{iaX\left((u,v),\left(u+\frac{1}{n},t\right)\right]\right. \\
&\quad + iaX\left(\left(u+\frac{1}{n},v\right),\left(s,v+\frac{1}{n}\right)\right] \\
&\quad \left.+ \lambda\left(s-u-\frac{1}{n}\right)\left(t-v-\frac{1}{n}\right)(e^{ia}-1)\right\} \\
&\longrightarrow e^{\lambda(s-u)(t-v)}(e^{ia}-1), \quad n\to\infty
\end{aligned}
$$

由定理 2.8,

$$
A_n \xrightarrow{a.s.L^1} E\{e^{iaX(A)} \mid \bigcap_n \mathring{\mathscr{F}}^*_{y_n}\},
$$

故得 (14.2).

(iii) ⇒ (i)　对任意的 $\eta\in \mathring{\mathscr{F}}^*_{z_1}$, a, $b\in R^1$, 由 (iii),

$$
\begin{aligned}
E\{e^{iaX(A)+ib\eta}\} &= E\{e^{ib\eta}E[e^{iaX(A)} \mid \bigcap_{z>z_1}\mathring{\mathscr{F}}^*_z]\} \\
&= \exp\{\lambda|A|(e^{ia}-1)\}Ee^{ib\eta}.
\end{aligned}
$$

这表明,$X(A)$ 与 η 独立,且服从参数为 $\lambda|A|$ 的 Poisson 分布. 故 X 是 Poisson 单. ∎

§ 11.4　广义 Poisson 单的截口定理

11.15 定理　(截口定理)　设 $X=\{X(z),z\in R^2_+\}$ 是两参数过程. 设测度 $F\in m$ (见 (1.2) 式). 对 $s>0$, $t>0$, 记截口过程 $X^t=\{X(s,t),s\geq 0\}$, $Y^s=\{X(s,t),t\geq 0\}$, $\Delta^t(s,s+u)=F(s+u,t)-F(s,t)$, $\Lambda^s(t,t+v)=F(s,t+v)-F(s,t)$. 则 X 是以 F 为强度测度的广义 Poisson 单的充要条件是:

(i) 固定 $t>0$, X^t 是单参数广义 Poisson 过程,其强度函数是 $\Delta^t(s,s+u)$; $X^t(s+u)-X^t(s)(s\geq 0,u>0)$ 与 $\mathring{\mathscr{F}}^1_s$ 独立.

(ii) 固定 $s>0$, Y^s 是单参数广义 Poisson 过程, 其强度函数是 $\Lambda^s(t,t+v)$; $Y^s(t+v)-Y^s(t)(t\geq 0,v>0)$ 与 $\mathring{\mathscr{F}}^2_t$ 独立.

证　必要性明显. 往证充分性,即验证定义 11.1(i)(ii)(iii)三个条件. 条件(i)明显. 往证条件(ii). 设 $z_1\leqslant z_2$, $z_i=(s_i,t_i)$. 由充分

性假设，$X(z_2\otimes z_1)-X(z_1)$ 与 $\mathscr{F}^1_{t_1}$ 独立，$X(z_2)-X(z_1\otimes z_2)$ 与 $\mathring{\mathscr{F}}^1_{t_1}$ 独立. 从而 $X(z_1,z_2]$ 与 $\mathring{\mathscr{F}}^1_{t_1}$ 独立. 同理可证 $X(z_1,z_2]$ 与 $\mathring{\mathscr{F}}^2_{t_1}$ 独立. 于是 $X(z_1,z_2]$ 与 $\mathring{\mathscr{F}}^*_{z_1}$ 独立. 由此得 X 的独立增量性.

往证条件 (iii). 设 $z_1\leqslant z_2$，$z_i=(s_i,t_i)$. 由充分性假设，$X(z_2)-X(z_1\otimes z_2)$ 和 $X(z_2\otimes z_1)-X(z_1)$ 分别有 $\Delta^{t_2}(s_1,s_2)$ 和 $\Delta^{t_1}(s_1,s_2)$ 为参数的 Poisson 分布. 因 $X(z_2\otimes z_1)-X(z_1)$ 与 $\mathring{\mathscr{F}}^*_{z_1}$ 独立，故按上面一段的证明，$X(z_2\otimes z_1)-X(z_1)$ 与 $X(z_1,z_2]$ 独立. 而 $X(z_2)-X(z_1\otimes z_2)=X(z_1,z_2]+X(z_2\otimes z_1)-X(z_1)$，依 Poisson 随机变量的特征函数的性质，有

$$\begin{aligned}&\exp\{\Delta^{t_2}(s_1,s_2)(e^{iu}-1)\}\\=&E\{e^{iuX(z_1,z_2]}\}\exp\{\Delta^{t_1}(s_1,s_2)(e^{iu}-1)\},\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}E\{e^{iuX(z_1,z_2]}\}&=\exp\{[\Delta^{t_2}(s_1,s_2)-\Delta^{t_1}(s_1,s_2)](e^{iu}-1)\}\\&=\exp\{F(z_1,z_2](e^{iu}-1)\}.\end{aligned}$$

即 $X(z_1,z_2]$ 的分布为(1.1). ∎

§11.5 广义 Poisson 单的各种马氏性

由于广义 Poisson 单是 Levy 单，依定理 9.38 和 §3.12 关系图，我们有

11.16 定理 广义 Poisson 单有 * 马氏性，宽过去马氏性，i 马氏性 ($i=1,2$)，宽将来马氏性，单点马氏性，强芽马氏性，关于 $D\in\mathscr{C}$ 有内宽 Levy 马氏性、外宽 Levy 马氏性和宽 Levy 马氏性，关于 $D\in\mathscr{D}$ 有 Levy 马氏性.

11.17 定理 X 有单点转移函数族 $\mathscr{P}$，即对 z_1，$z_2\in R^2_+$，$z_1\leqslant z_2$，i，$j\in E$ 时

$$P_{ij}(z_1,z_2)=P\{X(z_2)=j|X(z_1)=i\}$$

$$=\begin{cases}e^{-[F(z_2)-F(z_1)]}\dfrac{[F(z_2)-F(z_1)]^{j-i}}{(j-i)!} & ,\text{如 } j\geqslant i;\\ 0 & ,\text{如 } j<i.\end{cases}\tag{17.1}$$

证 由独立增量性，

$$
\begin{aligned}
P\{X(z_2) = j \mid X(z_1) = i\} &= P\{X(z_2) - X(z_1) = j - i \mid X(z_1) = i\} \\
&= P\{X(z_2) - X(z_1) = j\}.
\end{aligned}
$$

然后用（5.2）． ∎

11.18 定理 对广义 Poisson 单 X，当 $z_1, z_2 \in R_+^2$，$z_1 \leqslant z_2$，i，j，k，$r \in E$，$i \leqslant j \wedge k$ 时，

$$
P\{X(z_2) = r \mid X(z_1) = i, X(z_1 \otimes z_2) = j, X(z_2 \otimes z_1) = k\}
$$

$$
= \begin{cases} e^{-F(z_1, z_2]} \dfrac{(F(z_1, z_2])^{i-j-k+r}}{(i-j-k+r)!}, & \text{如 } i-j-k+r \geqslant 0, \\ 0, & \text{如 } i-j-k+r < 0. \end{cases} \tag{18.1}
$$

证 利用（1.1）和独立增量性，象证（17.1）一样，可得（18.1）． ∎

弱停点 $H = (\alpha, \beta)$ 的定义见 §1.2，记 $\Omega_H = \{\alpha < \infty, \beta < \infty\}$．记 $X^H = \{X^H(z), z \in R_+^2\}, X^H(z, \omega) = X(H(\omega), H(\omega) + z], \omega \in \Omega_H$．

11.19 定理 设 X 是广义 Poisson 单，H 是弱停点，则定义在 Ω_H 上的过程 X^H 也是广义 Poisson 单．且 X^H 与 $\mathscr{F}_H^*$ 独立．

证 类似于定理 5.24 的证明，略． ∎

§11.6 广义 Poisson 单不存在三点转移函数族

虽然定理 11.18 中已经求出了广义 Poisson 单的一些三点转移函数 $P_{ijkr}(u, v; s, t)(z_1 = (u, v), z_2 = z_1 + (s, t))$，$i \leqslant j \wedge k$．但不幸的是，广义 Poisson 单却不存在那怕是广义的三点转移函数族．注意，E 是非负整数集．

11.19 引理 设广义三点转移函数族 $\mathscr{P} = \{P_{ijkr}(u, v; s, t):(u, v) \in R_+^2, 0 < (s, t) \in R_+^2, i, j, k, r \in E\}$ 具有性质：如 $-j-k+r < 0$ 时有 $P_{0jkr}(u, v; s, t) = 0$．则对 $j \vee k > 0$，i，j，$kr \in E$ 有 $P_{ijkr}(u, v; s, t) = 0$．

证 如 $r<k$，则由水平转移性及定理假设，

$$P_{ijkr}(u,v;s,t)=\sum_{r_1=0}^{\infty}P_{ij0r_1}\left(u,v;\frac{s}{2},t\right)P_{0r_1kr}\left(u+\frac{s}{2},v;\frac{s}{2},t\right)$$
$$=0. \tag{19.1}$$

如 $r<j$，则由竖直转移性及定理假设，

$$P_{ijkr}(u,v;s,t)=\sum_{r_1=0}^{\infty}P_{i0kr_1}\left(u,v;s,\frac{t}{2}\right)P_{0jr_1r}\left(u,v+\frac{t}{2};s,\frac{t}{2}\right)$$
$$=0. \tag{19.2}$$

设 $j>0$. 由水平转移性、本定理假设和 (19.2)，

$$P_{ijkk}(u,v;s,t)=\sum_{r_1=0}^{\infty}P_{ij0r_1}\left(u,v;\frac{s}{2},t\right)P_{0r_1kk}\left(u+\frac{s}{2},v;\frac{s}{2},t\right)$$
$$=P_{ij00}\left(u,v;\frac{s}{2},t\right)P_{00kk}\left(u+\frac{s}{2},v;\frac{s}{2},t\right)$$
$$=0. \tag{19.3}$$

从而依 (19.1) — (19.3) 及水平转移性，对 $j>0$ 有

$$P_{ijkr}(u,v;s,t)=\sum_{r_1=0}^{\infty}P_{ijrr_1}\left(u,v;\frac{s}{2},t\right)P_{rr_1kr}\left(u+\frac{s}{2},v;\frac{s}{2},t\right)$$
$$=P_{ijrr}\left(u,v;\frac{s}{2},t\right)P_{rrkr}\left(u+\frac{s}{2},v;\frac{s}{2},t\right)$$
$$=0. \tag{19.4}$$

对称地，对 $k>0$，也可得 $P_{ijkr}(u,v;s,t)=0$. ∎

11.20 定理 广义 Poisson 单不存在广义三点转移函数族. 即不存在广义三点转移函数族 $\mathscr{P}=\{P_{ijkr}(u,v;s,t):(u,v)\in R_+^2,0<(s,t)\in R_+^2,i,j,k,r\in E\}$，使得当 $i\leqslant j\wedge k,z_1=(u,v)\in R_+^2$，$z_2=z_1+(s,t),0<(s,t)$ 时

$$P_{ijkr}(z_1;z_2-z_1)=\begin{cases}e^{-F(z_1,z_2]}\dfrac{(F(z_1,z_2])^{i-j-k+r}}{(i-j-k+r)!}, & \text{如 } i-j-k+r\geqslant 0;\\ 0, & \text{如 } i-j-k+r<0\end{cases} \tag{20.1}$$

证 谬设存在广义三点转移函数族 $\mathscr{P}$. 由定理 11.18，(18.1) 成立，即 (20.1) 成立，从而 $\mathscr{P}$ 满足引理 11.19 的假设，

因而当 $i\leqslant j\wedge k$ 时，对 $i>0$ 及一切 $r\geqslant i-j-k$，均有 $P_{ijkr}(u,v,s,t)=0$．这与（20.1）矛盾．∎

§11.7 广义 Poisson 单的存在定理

设 $X=\{X(z),z\in R_+^2\}$ 是广义 Poisson 单，其状态空间是非负整数集 E．定理 11.20 已指出，X 没有三点转移函数族．然而对负整数 i，$P\{X(z)=i\}=0$．因此，我们可以视 X 为扩大的状态空间 $Z=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$ 中的过程．这种过程称为扩状广义 Poisson 单，它却有三点转移函数族．

11.21 定义 设 $X=\{X(z),z\in R_+^2\}$ 是取值于整数集 Z 的随机过程，称 X 为有强度测度 $F\in m$ 的扩状广义 Poisson 单，如果定义 11.1 中的 (i)(ii)(iii) 满足．

11.22 注 对扩状广义 Poisson 单 X，显然有 $P\{X(z)<0\}=0$．又显然，扩状广义 Poisson 单 X 是随机连续的，因而可以设 X 是右连左极完全可分的．于是，

$$\wedge=\{\omega:X(z)<0\text{ 对某 }z\in R_+^2\}\tag{22.1}$$

的概率为 0．令

$$X'(z)=\begin{cases}X(z),\omega\in\Omega\setminus\wedge;\\ 0,\omega\in\wedge.\end{cases}\tag{22.2}$$

则 X 与 X' 等价，且 X' 是广义 Poisson 单，状态空间是 E．

11.23 定理 扩状 Poisson 单 X 是 $*$ 马氏过程，它有三点转移函数族 $\mathscr{P}=\{P_{ijkr}(u,v;s,t):(u,v)\in R_+^2,0<(s,t)\in R_+^2,i,j,k,r\in Z\}$，其元素 $P_{ijkr}(u,v;s,t)$ 由（20.1）式给出．

证 第一个结论由定理 11.16 得出．易证，对 $i,j,k,r\in Z$，由（20.1）给出的族 $\mathscr{P}$ 是三点转移函数族．由定理 11.18 知 X 的三点转移函数族是 $\mathscr{P}$．∎

11.24 定义 由（20.1）确定的，状态空间为 Z 的族 $\mathscr{P}=\{P_{ijkr}(u,v;s,t):(u,v)\in R_+^2,0<(s,t)\in R_+^2,i,j,k,r\in Z\}$ 称为扩状广义 Poisson 单三点转移函数族，简称扩状 Poisson 三点

族.

11.25 定理 设给定由（20.1）确定的扩状 Poisson 三点族 $\mathscr{P}$，给定（齐次的）单参数转移函数族 $\mathscr{P}^1=\{P^1_{ij}(s):i,j\in Z,s>0\}$ 和 $\mathscr{P}^2=\{P^2_{ij}(t):i,j\in Z,t>0\}$，满足 $P^1_{00}(s)=P^2_{00}(t)=1$，$s>0,t>0$，给定集中在（0，0）点的概率分布 P_0. 则存在概率空间（Ω，$\mathscr{F}$，P）及定义在其上的，取值于 Z 的，（$\mathscr{P}$，$\mathscr{P}^1$，$\mathscr{P}^2$）规则宽过去马氏过程 $X=\{X(z),z\in R^2_+\}$，$X(0,0)$ 的分布是 P_0，有限维分布族：$0=s_0<s_1<\cdots<s_m$，$0=t_0<t_1<\cdots<t_n$，$k_{ij}\in Z$，$0\leqslant i\leqslant m$，$0\leqslant j\leqslant n$，记 $z_{ij}=(s_i,t_j)$

$$
\begin{aligned}
&P\{X(s_i,t_j)=k_{ij},0\leqslant i\leqslant m,0\leqslant j\leqslant n\}\\
&=P_0(k_{00})\prod_{i=0}^{m-1}P^1_{k_{i0}k_{i+1,0}}(s_{i+1}-s_i)\prod_{j=0}^{n-1}P^2_{k_{0j}k_{0,j+1}}(t_{j+1}-t_j)\\
&\cdot\prod_{r=0}^{m-1}\prod_{l=0}^{n-1}P_{k_{rl}k_{r,l+1}k_{r+1,l}k_{r+1,l+1}}(s_{r+1}-s_r,t_{l+1}-t_l),
\end{aligned}\tag{25.1}
$$

X 是扩状广义 Poisson 单，按注 11.22 由 X 可得广义 Poisson 单 X'.

证 由定理 5.12，存在概率空间（Ω，$\mathscr{F}$，P）及过程 X 满足本定理的要求. 下面只要证 X 是扩状 Poisson 单.

(i) 由假设 P_0 集中于原点，又 $P^1_{00}(s)=P^2_{00}(t)=1,s>0,t>0$，可知定义 11.1(i) 成立. .

(ii) 往证定义 11.1 (iii) 成立. 实际上，设 r 是非负整数，则

$$
\begin{aligned}
&P\{X(z_1,z_2]=r\}\\
&=\sum_{i,j,k}P\{X(s_1,t_1)=i,X(s_1,t_2)=j,X(s_2,t_1)\\
&=k,X(s_2,t_2)=r+j+k-i\}
\end{aligned}\tag{25.2}
$$

由于对于 $i-j-k+r<0$ 的整数 i，j，k，（20.1）的值为 0，对（25.2）应用（25.1），可知（25.2）中，使 $i-j-k+r<0$ 的整数 i，j，k 对应的项，其值为 0，从而求和号只展布在使 $i-j-k+r\geqslant0$ 的 i,j,k 项上，记此求和为 Σ'. 再次应用（25.2）及关于 P_0，$P^1_{00}(s)$，$P^2_{00}(t)$ 的假设条件，得（25.2）右方等于

$$\Sigma' P_{000i}(s_1,t_1)P_{00ij}(s_1,t_2-t_1)P_{0i0k}(s_2-s_1,t_1)$$

$$\cdot P_{ijk\,r+j+k-i}(s_2-s_1,t_2-t_1)$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}\sum_{k=i}^{\infty}\left(e^{-F(s_1,t_1)}\frac{[F(s_1,t_1)]^i}{i!}\right)$$

$$\cdot\left(e^{-F(s_1,t_2-t_1)}\frac{[F(s_1,t_2-t_1)]^{j-i}}{(j-i)!}\right)$$

$$\cdot\left(e^{-F(s_2-s_1,t_1)}\frac{[F(s_2-s_1,t_1)]^{k-i}}{(k-i)!}\right)$$

$$\cdot\left(e^{-F(s_2-s_1,t_2-t_1)}\frac{[F(s_2-s_1,t_2-t_1)]^r}{r!}\right)$$

$$=e^{-F(s_2-s_1,t_2-t_1)}\frac{[F(s_2-s_1,t_2-t_1)]^r}{r!}$$

(iii) 往证定义 11.1 (ii) 成立.

由于定义 11.1 (iii)，增量 $X(z_1,z_2]$ 取非负整数，特别地，$X(z)$ 取非负整数.

设 $0=s_0<s_1<\cdots<s_m$，$0=t_0<t_1<\cdots<t_n$，$k_{ij}\in E$，$k_{0j}=k_{i0}=0$，$0\leqslant i\leqslant m$，$0\leqslant j\leqslant n$. 令 $x_{00}=0$，$x_{ij}=k_{ij}+k_{i-1,j}+k_{i,j-1}-k_{i-1,j-1}$，$z_{ij}=(s_i,\ t_j)$. 应用 (25.1)，

$$P\{X(z_{i-1,j-1},z_{ij}]=k_{ij},1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n\}$$

$$=P\{X(s_i,t_j)=x_{ij},0\leqslant i\leqslant m,0\leqslant j\leqslant n\}$$

$$=\prod_{i=0}^{m-1}\prod_{j=0}^{n-1}P_{x_{ij},x_{i,j+1},x_{i+1,j},x_{i+1,j+1}}(s_{i+1}-s_i,t_{j+1}-t_j)$$

$$=\prod_{i=0}^{m-1}\prod_{j=0}^{n-1}e^{-F(z_{ij},z_{i+1,j+1}]}\frac{(F(z_{ij},z_{i+1,j+1}])^{k_{i+1,j+1}}}{k_{i+1,j+1}!}$$

$$=\prod_{i=0}^{m-1}\prod_{j=0}^{n-1}P\{X(z_{ij},z_{i+1,j+1}]=k_{i+1,j+1}\}.$$ ∎

§ 11.8　广义 Poisson 单的第二存在定理

由于广义 Poisson 单不存在三点转移函数族，因此，在 § 11.7 中，我们用扩状广义 Poisson 单三点转移函数族构造扩状广义 Poisson 单，然后再得到广义 Poisson 单. 这就是广义 Poisson 单的第一存在定理. 现在叙述第二存在定理.

11.26 定义 设测度 $F\in\mathfrak{m}$（见（1.2）），取非负整数值的二元函数 $\mu(\omega,B),\omega\in\Omega,B\in\mathscr{B}(R_+^2)$ 称为广义 Poisson 随机测度，如果

(i) 对每个 $\omega\in\Omega$, $\mu(\omega,\cdot)$ 是 $\mathscr{B}(R_+^2)$ 上的测度.

(ii) 对每个 $B\in\mathscr{B}(R_+^2),\mu(\cdot,B)$ 是以 $F(B)$ 为参数的 Poisson 随机变量.

(iii) 对互不相交的 $B_1,\cdots,B_n\in\mathscr{B}(R_+^2),\mu(\cdot,B_1),\cdots,\mu(\cdot,B_n)$ 相互独立.

Ikeda 和 Watanabe [1, 定理 1.8.1] 已证明：广义 Poisson 随机测度存在. 因此，我们有下面的定理.

11.27 定理 设测度 $F\in\mathfrak{m}$, $\mu(\omega,B),\omega\in\Omega,B\in\mathscr{B}(R_+^2)$ 是广义 Poisson 随机测度. 令 $X(z)=\mu(R_z)$, 则 $X=\{X(z),z\in R_+^2\}$ 是广义 Poisson 单.

§11.9 Poisson 单的鞅刻划

本节设预先给定的 $(\mathscr{F}_z, z\in R_+^2)$ 满足条件 (F_4).

11.28 定义 设 X 是取值于 $E\cup\{\infty\}$ 的，零初值、右连续、矩形增的两参数过程. 称 X 为两参数点过程，如果

(i) X 关于 $(\mathscr{F}_z, z\in R_+^2)$ 适应.

(ii) 对 $0<z\in R_+^2$, $\Delta X(z)=0$ 或 1, 其中 $\Delta X(z)=X_1(z)-X_2(z)-X_4(z)+X_3(z)$, 而 $X_i(z),1\leqslant i\leqslant 4$ 是 X 在 z 点的灯极限.

11.29 定理 设 X 是两参数点过程. 则 X 是具有指数 $\lambda>0$ 的 Poisson 单的充要条件是：$\{X(s,t)-\lambda st,\mathscr{F}_{s,t},(s,t)\in R_+^2\}$ 是两参数鞅.

证 设 X 是 Poisson 单. 由性质 11.7, $\{X(s,t)-\lambda st,\mathscr{F}_{s,t},(s,t)\in R_+^2\}$ 是两参数强鞅，必要性得证. 往证充分性. 设 $\{X(s,t)-\lambda st,\mathscr{F}_{s,t},(s,t)\in R_+^2\}$ 是两参数鞅，由于条件 (F_4) 和关系图 2.18, 又是 i 鞅 $(i=1,2)$. 从而对固定的 t, $t'\in R_+$, $t<t'$, 过

程 $\{X(s,t')-X(s,t)-\lambda s(t'-t),\mathscr{F}_s^1,s\geq 0\}$ 是单参数鞅. 依严加安 [1, 定理 10.12], $\{X(s,t')-X(s,t),\mathscr{F}_s^1,s\geq 0\}$ 是具有指数 $\lambda(t'-t)$ 的单参数 Poisson 过程, 即对 $s<s'$, $X((s,t),(s',t')]$ 服从指数为 $\lambda(s'-s)(t'-t)$ 的 Poisson 分布, 且与 $\mathscr{F}_s^1$ 独立. 同理可证, $X((s,t),(s',t')]$ 与 $\mathscr{F}_t^2$ 独立. 从而 $X((s,t),(s',t')]$ 与 $\mathscr{F}_{st}^*$ 独立. 于是 X 为 Poisson 单. ∎

§ 11.10 广义 Poisson 单的跳线与轨道

11.30 定理 对几乎一切 $\omega\in\Omega$, X 的轨道 $X(\omega)$ 是双增函数.

证 由 (1.1), 性质 11.3 和 X 的完全可分性得出. ∎

11.31 定义 设 B 是 R_+^2 中的连续曲线, $z=(s,t)\in B$. $u(z,\delta)=\{y\in R_+^2:|y-z|<\delta\}$ 是 z 在 R_+^2 中的 δ 邻域.

(i) 称 z 为 B 的横内点, 如果存在 $\delta>0$ 使 $B\cap u(z,\delta)=(s-\delta,s+\delta)\times\{t\}$. B 的横内点全体记为 B^1. 类似定义竖内点. B 的竖内点全体记为 B^2. $B^6=B^1\cup B^2$ 中的点称为 B 的 (线) 内点.

(ii) 称 z 为 B 的凹折点, 如果存在 $\delta>0$ 使 $B\cap u(z,\delta)=(\{s\}\times[t,t+\delta))\cup([s,s+\delta)\times\{t\})$. B 的凹折点全体记为 B^3. 称 z 为 B 的凸折点, 如果存在 $\delta>0$ 使 $B\cap u(z,\delta)=((s-\delta,s]\times\{t\})\cup(\{s\}\times(t-\delta,t])$. B 的凸折点全体记为 B^4. $B^5=B^3\cup B^4$ 中的点统称为折点.

11.32 定义 设 B 是 R_+^2 中连续曲线. 称 B 为正规阶梯折线, 如果

(i) 对任意 $s>0$, 存在 $t>0$, 使 $(s,t)\in B$; 对任意 $t>0$, 存在 $s>0$, 使 $(s,t)\in B$.

(ii) $B=\bigcup_{i=1}^{4}B^i$, 即 B 的每一点或为内点, 或为折点.

(iii) $B\cap\lambda_0=\varnothing$, 即 B 与坐标轴不相交.

从定义容易看出: 正规阶梯折线 B 上任意两点无严格序关系; 对任意 $z\in R_+^2$, B 在 R_z 中只有有限个折点; 对任意 $\varepsilon>0$, R_ε^1

和 R_2^2 中均有 B 的折点；B 以二坐标轴为渐近线. 正规阶梯折线是定义 5.39 中的简单折线，但反之不真。下图是正规阶梯折线示意图.



图 6　正规阶梯折线示意图

11.33 引理　设 $X=\{X(z),z\in R_+^2\}$ 是取值于 E 的右连续函数，满足

(i) $X(z)=0$，如 $z\in\lambda_0$.

(ii) X 是双增函数.

(iii) 对任意固定的有理数 $r>0$，函数 $X^r=\{X(s,r),s\geqslant 0\}$ 和 $Y^r=\{X(r,t),t\geqslant 0\}$ 均是单增的阶梯函数①，跃度为 1，且 $\lim\limits_{s\to\infty}X(s,r)=\lim\limits_{t\to\infty}X(r,t)=\infty$.

令 $A_n=\{z;z\in R_+^2,X(z)=n\},n\geqslant 0$，$\overline{A}_n$ 表示闭包. 则 $B_n=\overline{A}_{n-1}\cap\overline{A}_n$ $(n\geqslant 1)$ 是正规阶梯折线，称为 X 的第 n 根跳线.

证　(i) 往证：B_n 上的任意两点无严格序关系. 简称 B_n 无严格序关系.

设不然，存在 z_1，$z_2\in B_n$ 且 $z_1<z_2$. 由 B_n 的定义，在 z_1 和 z_2 各自的充分小邻域中，分别有 z_3 和 z_4，使 $z_3\in A_n$，$z_4\in A_{n-1}$，且

① 称 $f(s),s\geqslant 0$ 为阶梯函数，如果存在有限或可数无穷个 $[s_i,s_{i+1})$ 及常数 a_i，$0=s_0<s_1<s_2<\cdots$，$\bigcup\limits_i[s_i,s_{i-1})=[0,\infty)$，且 $f(s)=a_i$，$s\in[s_i,s_{i+1})$.

$z_3<z_4$. 而 $X(z_3)=n, X(z_4)=n-1$. 这与 X 的单增性相矛盾.

(ii) 往证：本引理的条件 (iii) 中对任意固定的 $r>0$ 成立.

设 r 是无理数. 只对 X^r 证明. 由 X 的右连续性和双增性得 X^r 的右连续、单增性. 因而 X^r 存在跳跃点 $\tau_1, \tau_2, \cdots$. 但不会出现某 l, $\tau_l<\infty$ 而 $X(s,r)=X(\tau_l,r)$ 对一切 $s\in[\tau_l,\infty)$. 否则，任取有理数 $u\in(0,r)$，由假设 $\lim\limits_{s\to\infty}X(s,u)=\infty$. 而当 $s\in(\tau_l,\infty)$ 时，

$$
\begin{aligned}
X((\tau_l,u),(s,r)] &= X(s,r)-X(\tau_l,r)-X(s,u)+X(\tau_l,u) \\
&= -X(s,u)+X(\tau_l,u)\to-\infty, \\
&\quad \text{当 } s\to\infty \text{ 时}.
\end{aligned}
$$

这与 X 的双增性相矛盾. 因此，必定 $0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_l<\cdots$. 设 $\tau_l\uparrow\tau$，则必定 $\tau=\infty$. 不然，设 $\tau<\infty$，记 $X(\tau,r)=k$. 则当 $l>k$ 时，$X(\tau_l,r)\geqslant l>k=X(\tau,r)$. 这与 X 的单增性相矛盾. 因此，X^r 是右连续、单增阶梯函数，且由于 $X(\tau_l,r)\geqslant l$，故 $\lim\limits_{s\to\infty}X(s,r)=\infty$.

(iii) 往证：X^r 在跳跃点的跃度为 1.

不然，设 X^r 在某跳跃点 τ 的跃度大于 1. 记 $X(\tau-0,r)=k$, $X(\tau,r)=j\geqslant k+2$. 由 X 的右连续性，存在有理数 $u>r$ 使 $X(\tau,u)=j$. 本引理的条件 (iii) 说明，X^u 是跃度为 1 的单增阶梯函数，故必存在 X^u 的跳跃点 $\alpha<\tau$ 使 $X(\alpha,u)=j-1$. 因 X^r 单增，故 $X(\alpha,r)\leqslant X(\tau-0,r)=k$. 这样，

$$
\begin{aligned}
X((\alpha,r),(\tau,u)] &= X(\tau,u)-X(\alpha,u)-X(\tau,r)+X(\alpha,r) \\
&= j-(j-1)-j+X(\alpha,r)\leqslant-(j-1) \\
&\quad +k\leqslant-1.
\end{aligned}
$$

这与 X 的双增性相矛盾.

(iv) 验证定义 11.32 中条件 (i).

设 $t>0$. 由于本引理条件 (iii) 对任意 $r>0$ 成立，故存在跳跃点 $s>0$ 使 $X(s-0,t)=n-1, X(s,t)=n$，从而 $(s,t)\in B_n$.

(v) 设 $z_0=(s_0,t_0)\in B_n$. 往证：①如果存在 $a\in(0,s_0)$ 使

$y_\alpha = (\alpha, t_0) \in B_n$，则 $(\alpha, s_0) \times \{t_0\} \subset B_n$；②如果存在 $\alpha \in (s_0, \infty)$ 使 $y_\alpha = (\alpha, t_0) \in B_n$，则 $(s_0, \alpha) \times \{t_0\} \subset B_n$.

只证①. 对任意 $s \in (\alpha, s_0)$，依定义 11.32 中条件(i)，存在 $t > 0$ 使 $z = (s, t) \in B_n$. 因为当 $t > t_0$ 时有 $y_\alpha < z$，当 $t < t_0$ 时有 $z < z_0$，均与 B_n 无严格序关系相矛盾. 所以，必定 $t = t_0$，即 $(s, t_0) \in B_n$.

(vi) 设 $z_0 = (s_0, t_0) \in B_n$. 往证：存在 z_0 的 δ 邻域 $u(z_0, \delta)$ 使

$\{z: z \in u(z_0, \delta)$；或 $z < z_0$，或 $z_0 < z$，或 $z_0 \ll z$，或 $z \ll z_0\} \cap B_n = \varnothing$.

证 由于 B_n 无严格序关系，$z < z_0$ 或 $z_0 < z$ 的情形是明显的. 剩下 $z_0 \ll z$ 或 $z \ll z_0$ 两种情形中，只证后者. 即要证：$\{z: z \in u(z_0, \delta), z \ll z_0\} \cap B_n = \varnothing$.

设不然. 则存在 $z_l \ll z_0$，$z_l \in B_n$ $(l = 1, 2, \cdots)$，$z_l \to z_0$. 不失一般性，可设 $z_l \ll z_{l+1}$. 由于 $z_l \in B_n = \overline{A}_{n-1} \cap \overline{A}_n$，故可取与 z_l 充分接近的 $p_l = (\alpha_l, \beta_l) \in A_{n-1}$，$q_l = (\varepsilon_l, \delta_l) \in A_n$，且 $p_l \to z_0$，$q_l \to z_0$. 不失一般性，可设 $p_l \ll q_l \ll p_{l+1}$.

如果存在 $s \in (0, s_0)$ 使 $y_s = (s, t_0) \in B_n$，则对一切充分大的 l 有 $y_s < z_l$，与 B_n 无严格序关系相矛盾. 于是由 (v)，对任意 $s \in (0, s_0)$ 有 $y_s = (s, t_0) \notin B_n$，从而存在 y_s 的邻域 $u(y_s, r_s)$ 使 $u(y_s, r_s) \cap A_{n-1} = \varnothing$ 或 $u(y_s, r_s) \cap A_n = \varnothing$. 特别地，当 $t \in [t_0, t_0 + r_s)$ 时，$X(s, t) \neq n - 1$ 或 n. 特别地，取 $s = \alpha_l, t = t_0$ 时有 $X(\alpha_l, t_0) \neq n - 1$ 或 n. 由 $\{X(\alpha_l, t), t \geqslant 0\}$ 的单增性及 $t_0 < \beta_l$ 得 $X(\alpha_l, t_0) \leqslant X(\alpha_l, \beta_l) = n - 1$. 已经说明 $X(\alpha_l, t_0) \neq n - 1$ 或 n，故 $X(\alpha_l, t_0) \leqslant n - 2$. 令 $l \to \infty$ 时，$\alpha_l \to s_0 -$，从而 $X(s_0 -, t_0) \leqslant n - 2$. 因 $\{X(s, t_0), s \geqslant 0\}$ 的跃度为 1，故 $X(s_0, t_0)$（记为 k）$\leqslant (n - 2) + 1 = n - 1$. 由 $\{X(s_0, t), t \geqslant 0\}$ 的右连续性，存在 $\varepsilon > 0$ 使对任意 $t \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$ 有 $X(s_0, t) = X(s_0, t_0) \leqslant n - 1$. 但当 l 充分大时，$\delta_l \in (t_0, t_0 + \varepsilon)$，从而 $X(s_0, \delta_l) \leqslant n - 1$. 由 $\{X(s, \delta_l), s \geqslant 0\}$ 的单增性，$n = X(\varepsilon_l, \delta_l) \leqslant X(s_0, \delta_l) \leqslant n - 1$. 矛盾.

(vii) 设 $z_0 = (s_0, t_0) \in B_n$. 往证：

①下面的（$A1$）（$A2$）中必出现一种且只出现一种：

（$A1$）存在 $\varepsilon \in (0,s_0)$ 使 $(s_0-\varepsilon,s_0)\times\{t_0\}\subset B_n$.

（$A2$）存在 $\varepsilon>0$，使 $\{s_0\}\times(t_0,t_0+\varepsilon)\subset B_n$.

②下面的（$D1$）（$D2$）中必出现一种且只出现一种：

（$D1$）存在 $\varepsilon\in(0,t_0)$ 使 $\{s_0\}\times(t_0-\varepsilon,t_0)\subset B_n$.

（$D2$）存在 $\varepsilon>0$ 使 $(s_0,s_0+\varepsilon)\times\{t_0\}\subset B_n$.

只证①.（$A1$）（$A2$）同时出现将与 B_n 无严格序关系矛盾，故（$A1$）（$A2$）只能出现一种. 下面证明必须出现一种.

假定（$A1$）（$A2$）均不出现. 设 $u(z_0,\delta)$ 为（vi）中的 δ 邻域. 对充分小的 $\varepsilon>0\left(\text{例如取 } \varepsilon\in\left(0,\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right)\right)$ 及 $s\in(s_0-\varepsilon,s_0)$，则存在 $t_s>0$ 使 $z_s=(s,t_s)\in B_n$. 由于 B_n 无严格序关系、（$A1$）（$A2$）均不出现以及（vi），则 $z_s\ll z_0$，且 z_s 在 $u(z_0,\delta)$ 之上. 同样地，对充分小的 $\varepsilon\in\left(0,\frac{\delta}{\sqrt{2}}\right)$ 及 $t\in(t_0,t_0+\varepsilon)$，存在 $z_t'=(s_t,t)\in B_n$，$z_t'\ll z_0$，且 z_t' 在 $u(z_0,\delta)$ 之左，从而 $z_t'<z_s$. 矛盾.

（viii）往证 $B_n=\bigcup_{i=1}^{4}B_n^i$.

设 $z_0=(s_0,t_0)\in B_n$. 则由（vii），必须出现且只能出现下列组合中的一种：（$A1$）与（$D1$），（$A1$）与（$D2$），（$A2$）与（$D1$），（$A2$）与（$D2$）. 这正说明 z_0 必定是凸折点、横内点、竖内点、凹折点中的一种，即 $z_0\in\bigcup_{i=1}^{4}B_n^i\subset B_n$. 故 $B_n\subset\bigcup_{i=1}^{4}B_n^i\subset B_n$，$B_n=\bigcup_{i=1}^{4}B_n^i$.

（IX）B_n 与坐标轴 λ_0 不相交，以及 B_n 是连续曲线，是显然的.

综上，我们已证明了 B_n 是正规阶梯折线. ∎

11.34 定理 设 B_n 是广义 Poisson 单 X 的第 n 根跳线. 则对几乎一切 $\omega\in\Omega$，$B_n(\omega)$ 是正规阶梯折线.

证 因 X 右连续，故只需验证引理 11.33 中条件(i)(ii)(iii). 由 X 的定义 11.1 得(i).(ii)由定理 11.30 得出.(iii)由定理 11.15

得出. ∎

11.35 定理 对几乎一切 $\omega\in\Omega$, $B_n(\omega)$ 的凸折点必定是 $B_{n+1}(\omega)$ 的凹折点，即 $B_n^4(\omega)\subset B_{n+1}^3(\omega)$. 当 z 是 $B_n(\omega)$ 的凸折点即 $z\in B_n^4(\omega)$ 时，$X(z,\omega)=n+1$；当 $z\in B_n(\omega)-B_n^4(\omega)$ 时，$X(z,\omega)=n$.

证 注意 $B_n(\omega)(n=1,2,\cdots)$ 均是正规阶梯折线. 设存在 $z_0\in B_n^4(\omega)-B_{n+1}^3(\omega)$. 由于 X 的双增性，z_0 不可能是 $B_{n+1}(\omega)$ 的凸折点或内点. 于是存在 $\delta>0$ 使 $u(z_0,\delta)\cap B_{n+1}(\omega)=\varnothing$，故存在以 z_0 为中心的正位矩形 $(z_1,z_2]\subset u(z_0,\delta)$，$X$ 在该矩形的四个顶点 z_1, $z_1\otimes z_2$, $z_2\otimes z_1$, z_2 上的值分别为 $n-1$, n, n, n. 于是

$$X(z_1,z_2]=n-n-n+(n-1)=-1.$$

这与 X 的双增性相矛盾. 所以 $B_n^4(\omega)\subset B_{n+1}^3(\omega)$.

由 X 的右连续性得：当 $z\in B_n^4$ 时，$X(z)=n+1$，当 $z\in B_n-B_n^4$ 时，$X(z)=n$. ∎

图 7 是广义 Poisson 单的跳线排列示意图.

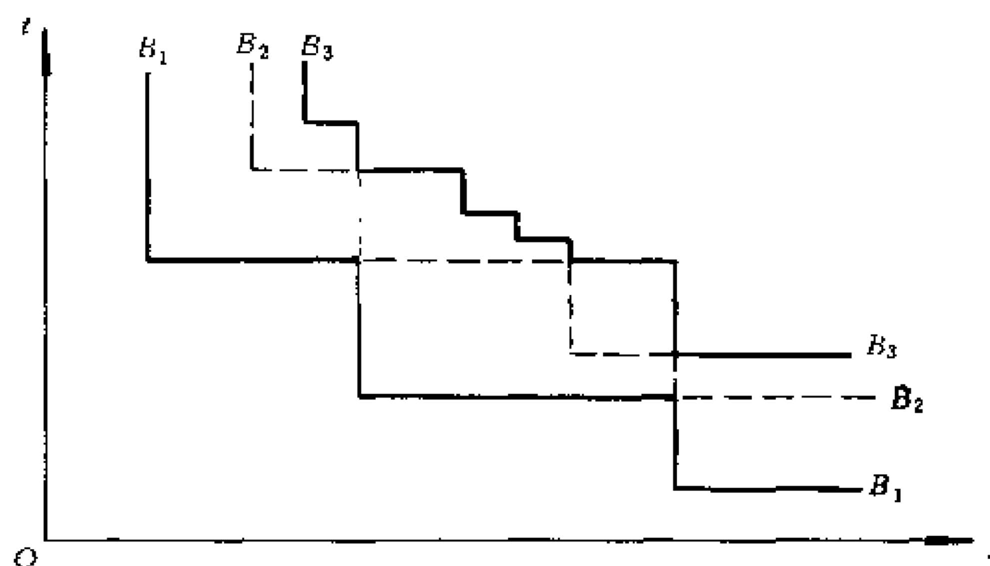


图 7 跳线排列示意图

§11.11 广义 Poisson 单样本函数的刻划

由图 7 及引理 11.33 (iii)，下面的两个定理是明显的，其中的分割线集 $\mathscr{L}$ 等记号和概念见 §1.2.

11.36 定理 对几乎一切 $\omega \in \Omega$，$B_n(\omega) \in \mathscr{L}$，$B_n(\omega) \leqslant B_{n+1}(\omega)$，且

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} [B_n(\omega), B_{n+1}(\omega)) = R_+^2 , \tag{36.1}$$

其中 $B_0(\omega) - \lambda_0$. 当 $z \in [B_n(\omega), B_{n+1}(\omega))$ 时，$X(z,\omega) = n$.

11.37 定理 对几乎一切 $\omega \in \Omega$，$X(\omega)$ 是灯函数.

11.38 定义 记 $W_1 = B_1^3$，$W_{n+1} = B_{n+1}^3 - B_n^4$，$n=1, 2, \cdots$，$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$. W_n 中的点称为 B_n 的危险点；W 中的点称为 X 的危险点. B_n 在 R_z 中危险点的个数记为 $K_n(z)$.

11.39 定理 对几乎一切 $\omega \in \Omega$，当且只当 $z \in R_+^2$ 是 X 的危险点时，$\Delta X(z,\omega) = 1$；否则，$\Delta X(z,\omega) = 0$. 而且

$$X(z,\omega) = \sum_{y \in R_z} \Delta X(y,\omega), \tag{39.1}$$

证 由图 7，结论明显. ∎

11.40 引理 设 $z \in R_+^2$ 固定. 对几乎一切 $\omega \in \Omega$，$B_n(\omega)$ 与 $\mu_z \cup \lambda_z$ 不相交，特别地 $P(z \in B_n) - 0$. 记号 λ_z，μ_z 见 §1.1.

证 由性质 11.9，$X(\omega)$ 在 z 的某邻域 $u(z,\delta)$ 上取常值，故 $\mu_z \cup \lambda_z$ 与 B_z 相交的概率为零. ∎

11.41 定理 $B_n (n = 1,2,\cdots)$ 是停线，且

$$P\{z \in [B_n, B_{n+1})\} = P\{z \in (B_n, B_{n+1})\} = e^{F(z)} \frac{[F(z)]^n}{n!}. \tag{41.1}$$

$$P\{\mu_z \leqslant B_n\} = P\{\mu_z < B_n\} = e^{F(z)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[F(z)]^k}{k!}. \tag{41.2}$$

$$P\{B_n \leqslant \lambda_z\} = P\{B_n < \lambda_z\} = e^{F(z)} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[F(z)]^k}{k!} \tag{41.3}$$

证 注意 $(z \in [B_n, B_{n+1})) = (X(z) = n)$, $(\mu_z < B_n) = (X(z) \leqslant n-1)$, $(B_n < \lambda_z) = (X(z) \geqslant n+1)$，由 (5.2) 及引理 11.40 得证定理。 ∎

§ 11.12 广义 Poisson 单在射线上的导出过程

设 L 是 R^2_+ 中的射线，其方程为

$$t = ls + c, \quad s \geqslant 0.$$

其中 $l \geqslant 0$, $c \geqslant 0$. 令 $Y(s) = X(s, ls + c)$, 则 $Y = \{Y(s), s \geqslant 0\}$ 称为 X 在 L 上的导出过程.

11.42 定理 Y 是纯生过程，有转移函数族 $\mathscr{P} = \{P_{ij}(u,s);\ 0 \leqslant u < s, i, j \in E\}$, 其中

$$P_{ij}(u,s) = P\{Y(s) = j | Y(u) = i\}$$
$$= \begin{cases} e^{-\Lambda(u,s)} \dfrac{[\Lambda(u,s)]^{j-i}}{(j-i)!}, & \text{如 } i \leqslant j, \\ 0, & \text{如 } i > j. \end{cases} \tag{42.1}$$

其中 $\Lambda(u,s) = F(s, ls + c) - F(u, lu + c)$.

证 由 X 的单点马氏性易得. ∎

12 Brown 单

§ 12.1　白噪声与 Brown 单

Brown 单即两参数 Brown 运动，是一种特殊情形的两参数独立增量过程，也是两参数马氏过程的一种最基本、最典型的状态连续的过程．本章中设（E，$\mathscr{E}$）是一维欧氏空间（R，$\mathscr{B}$）．

12.1 定义　称随机集函数 $W=\{W(A):A\in\mathscr{B}_+^2,|A|<\infty\}$ 为白噪声，如果

(i) $W(A)$ 有正态分布 $N(0,|A|)$．

(ii) 如 $A\cap B=\varnothing$，则 $W(A)$ 与 $W(B)$ 独立．

下面的定理是显然的．

12.2 定理　W 为白噪声的充要条件是：W 是均值为 0，协方差为 $C(A,B)=EW(A)W(B)=|A\cap B|$ 的 Gauss 过程．

12.3 定理　白噪声 W 存在．

证　令 $C(A,B)=|A\cap B|$，易知 $C(A,B)$ 是正定的．由高斯过程理论知，存在 Gauss 过程 $W=\{W(A):A\in\mathscr{B}_+^2,|A|<\infty\}$，均值为 0，协方差为 $C(A,B)$．该 W 就是白噪声．∎

12.4 定理　白噪声 W 是有限可加的集函数．

证　如 $A\cap B=\varnothing$，则由定义 12.1，

$E[W(A)+W(B)-W(A\cup B)]^2=|A|+|B|+|A\cup B|$
$-2|A|-2|B|=0$，

即　$W(A\cup B)=W(A)+W(B)$．∎

12.5 定义　称 $W=\{W(z),z\in R_+^2\}$ 为 Brown 单，如果 W

是均值为 0 的 Gauss 过程，且对任意 $z=(s,t)$，$z'=(s',t')\in R^2_+$，

$$EW(z)W(z')=(s\wedge s')(t\wedge t') \tag{5.1}$$

设 W 是 Brown 单. 设 $A=(z_1,z_2]$ 是 R^2_+ 中的矩形，定义 $X(A)$ 为 X 的矩形增量. 设 A 是有限个互不相交的矩形的并，则 $W(A)$ 按可加性定义. 设 A 是任意 Borel 集，$|A|<\infty$，则可用一列互不相交的矩形的并 A_n 逼近 A，使 $|A-A_n|+|A_n-A|\longrightarrow 0$，由于

$$E[W(A)-W(A_n)]^2=|A-A_n|+|A_n-A|\longrightarrow 0$$

故可确定 $W(A)$，而且 $W(A)$ 是以概率 1 一意确定的，即 $W(A)$ 与 A_n 的选取无关. 易见 $W=\{W(A):A\in\mathscr{B}^2_+,|A|<\infty\}$ 满足定义 12.1 (i) (ii)，即 W 是白噪声. 因此，Brown 单是独立增量过程.

反之，设 W 是白噪声，令 $W(z)=W(R_z)$，则 $W=\{W(z),z\in R^2_+\}$ 是 Brown 单.

§12.2 Brown 单的导出过程

为了对 Brown 单 W 有一些直观印象，我们考察导出过程，即参数点沿 R^2_+ 的某些曲线上变化的情形.

12.6 性质 W 的初值为 0. 固定 $s>0$，则 $\{W(s,t),t\geqslant 0\}$ 是单参数 Brown 运动，它是均值为 0，协方差函数为 $C_s(t,t')=s(t\wedge t')$ 的 Gauss 过程.

12.7 性质 沿着双曲线：$st=1$. 令

$$U(t)=W(e^t,e^{-t}),$$

则 $\{U(t),-\infty<t<\infty\}$ 是 Ornstein-Uhlenbeck 过程，即是严格平稳过程，均值为 0，方差为 1，协方差函数为

$$C(s,t)=EW(e^s,e^{-s})W(e^t,e^{-t})=e^{-|s-t|}.$$

12.8 性质 沿着对角线：$s=t$. 令 $M(t)=W(t,t)$. 则 $M=\{M(t),t\geqslant 0\}$ 是鞅，有独立增量，但它不是 Brown 运动，因为这

些增量不是平稳的.

12.9 性质 存在尺度、反演、平移变换，它们将一个 Brown 单变到另一个 Brown 单.

尺度：$A(s,t) = \frac{1}{ab}W(a^2s,b^2t), a,b > 0$.

反演：$C(s,t) = stW(s^{-1},t^{-1}), D(s,t) = sW(s^{-1},t)$.

于 (s_0, t_0) 处的平移：$E(s,t) = W((s_0,t_0),(s_0+s,t_0+t)]$,

则 A，C，D，E 均是 Brown 单，且 E 与 $\overset{\circ}{\mathscr{F}}{}^*_{s_0 t_0}$独立.

12.10 性质 令 $U(s,t) = e^{-s-t}W(e^{2s},e^{2t})$，则 $U = \{U(z), z \in R^2\}$ 是两参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程，它是 R^2 上的平稳 Gauss 过程，协方差为 $E\{U(s,t)U(u,v)\} = e^{-|u-s|-|t-v|}$. 如果考虑 U 在任意直线 $t=bs+a$ 上的导出过程 $V = \{V(s), s \geqslant 0\}$，则 V 是单参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程.

§12.3 鞅性与 0—1 律

设 $\{\overset{\circ}{\mathscr{F}}_z, z\in R^2_+\}$ 是 Brown 单 W 的自然 σ 域族，即 $\overset{\circ}{\mathscr{F}}_z = \sigma\{W(y), y \leqslant z\}$.

12.11 定理（0—1 律） 设 $D_n \subset R^2_+$，$D_n \downarrow \varnothing$. 对 $B \in \bigcap_n \overset{\circ}{\mathscr{F}}(D_n)$，有 $P(B) = 0$ 或 1.

证 设 $A \in \mathscr{B}^2_+$，$|A| < \infty$. 由于 $|A-D_n| \to |A|$，故 L^2 极限
$W(A) = \lim_{n\to\infty} W(A-D_n)$ 与 $\overset{\circ}{\mathscr{F}}(D_n)$ 相互独立，从而与 $\bigcap_n \overset{\circ}{\mathscr{F}}(D_n)$
独立，即 $B \in \bigcap_n \overset{\circ}{\mathscr{F}}(D_n)$ 与 $W(A)$ 独立，从而 B 与 $\overset{\circ}{\mathscr{F}}_\infty = \bigvee_{z\in R^2_+} \overset{\circ}{\mathscr{F}}_z$
独立，于是 B 与 B 本身独立，故 $P(B) = 0$ 或 1. ∎

12.12 定理 Brown 单 W 关于自然 σ 域族 $\{\overset{\circ}{\mathscr{F}}_z, z\in R^2_+\}$ 是强鞅，且 $\{\overset{\circ}{\mathscr{F}}_z, z\in R^2_+\}$ 满足条件 (F_1)—(F_4).

证 由于 $z<z'$ 时，$(z,z']\cap R_z^*=\varnothing$，故 $W(z,z']$ 与 $\mathring{\mathscr{F}}_z^*$ 独立，从而 $E\{W(z,z']|\mathring{\mathscr{F}}_z^*\}=E\{W(z,z']\}=0$，故 W 是强鞅.

验证条件$(F_1)(F_2)$平凡. 现验证条件(F_4). 令 $z,z'\in R_+^2$，记 $A=R_z-R_{z\wedge z'}$，$B=R_{z'}-R_{z\wedge z'}$. 故 $\mathring{\mathscr{F}}_z=\mathring{\mathscr{F}}_{z\wedge z'}\vee\mathring{\mathscr{F}}(A)$，$\mathring{\mathscr{F}}_{z'}=\mathring{\mathscr{F}}_{z\wedge z'}\vee\mathring{\mathscr{F}}(B)$，由于 $\mathring{\mathscr{F}}_{z\wedge z'}$，$\mathring{\mathscr{F}}(A)$，$\mathring{\mathscr{F}}(B)$相互独立，故 $\mathring{\mathscr{F}}_z$ 和 $\mathring{\mathscr{F}}_{z'}$ 关于 $\mathring{\mathscr{F}}_{z\wedge z'}$ 是条件独立的，即(F_4).

验证(F_3). 选一列 $z_n\downarrow z$，$z<z_n$. 显然，$\mathring{\mathscr{F}}_z\subset\bigcap_{z'>z}\mathring{\mathscr{F}}_{z'}\subset\bigcap_n\mathring{\mathscr{F}}_{z_n}=\mathring{\mathscr{F}}_{z+}$. 故只要证：$\forall A\in\mathring{\mathscr{F}}_\infty=\bigvee_{z\in R_+^2}\mathring{\mathscr{F}}_z$，有

$$P(A|\mathring{\mathscr{F}}_z)=P\Big(A\Big|\bigcap_n\mathring{\mathscr{F}}_{z_n}\Big). \tag{12.1}$$

由于 $\mathring{\mathscr{F}}_\infty$ 可由形如 $A=B\cap C$ 的集产生，其中 $B\in\mathring{\mathscr{F}}_z$，$C\in\mathring{\mathscr{F}}(R_+^2-R_z)$，故只要证(12.1)对 $A=B\cap C$ 成立即可.

记 $D_n=R_{z_n}-R_z$，则 $\mathring{\mathscr{F}}_{z_n}=\mathring{\mathscr{F}}_z\vee\mathring{\mathscr{F}}(D_n)$，由于 $\mathring{\mathscr{F}}_z$ 与 $\mathring{\mathscr{F}}(D_n)$独立，故

$$P(A|\mathring{\mathscr{F}}_{z_n})=I_BP(C|\mathring{\mathscr{F}}_{z_n})=I_BP(C|\mathring{\mathscr{F}}(D_n)).$$

注意 $\bigcap_n D_n=\varnothing$，由定理 12.1.1 知，上式右方趋于 $I_BP(C)=P(B\cap C|\mathring{\mathscr{F}}_z)=P(A|\mathring{\mathscr{F}}_z)$，而左方趋于 $P(A|\bigcap_n\mathring{\mathscr{F}}_{z_n})$，从而(12.1)成立. ∎

§12.4 样本函数的连续性

先介绍一个非常有用的不等式，称为 Gasia，Rodemich 和

Rumsey 不等式. 设 ψ 和 φ 是定义在 $R=(-\infty,+\infty)$ 上的、关于原点对称的、非负连续函数. $\varphi(0)=0$, φ 在 $(0,\infty)$ 上非降; ψ 为下凸函数, $\lim\limits_{x\to\infty}\psi(x)=\infty$. R^2 中的正方形 A 的边长记为 $l(A)$. 记 $e=(1,1)$, $R_e=(0,e]$.

12.13 定理 设 f 是 R_e 中 L—可积函数, 且对任意 $A\subset R_e$, 有

$$\iint\limits_{A\,A}\psi\left(\frac{f(y)-f(x)}{\varphi(l(A))}\right)dxdy\leqslant C. \tag{13.1}$$

其中 C 是与 A 无关的常数. 则存在勒贝格零测集 $K\subset R_e$, 使对任意 x, $y\in R_e-K$, 有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 8\int_0^{|x-y|}\psi^{-1}\left(\frac{C}{t^4}\right)d\varphi(t). \tag{13.2}$$

如果 f 连续, 则 (13.2) 对所有 x, $y\in R_e$ 成立.

证 设 $Q_0\supset Q_1\supset\cdots$ 是 R_e 中正方形序列, 使得 $\varphi(l(Q_n))=\frac{1}{2}\varphi(l(Q_{n-1}))$. 对任意正方形 Q, 令

$$f^Q=\frac{1}{|Q|}\int\limits_Q f(x)dx. \tag{13.3}$$

由于 ψ 是下凸的, 依 Jensen 不等式,

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{f^{Q_n}-f^{Q_{n-1}}}{\varphi(l(Q_{n-1}))}\right)&\leqslant\frac{1}{|Q_{n-1}|}\int\limits_{Q_{n-1}}\psi\left(\frac{f^{Q_n}-f(x)}{\varphi(l(Q_{n-1}))}\right)dx\\&\leqslant\frac{1}{|Q_n|\cdot|Q_{n-1}|}\int\limits_{Q_{n-1}}\int\limits_{Q_n}\psi\left(\frac{f(y)-f(x)}{\varphi(l(Q_{n-1}))}\right)dxdy\\&\leqslant\frac{C}{|Q_{n-1}|\cdot|Q_n|}.\end{aligned} \tag{13.4}$$

由假设知 ψ 在 $(0,\infty)$ 上是增函数, 记 ψ 的反函数为 ψ^{-1}. 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\psi(x)=\infty$ 知 $\psi^{-1}\left(\frac{C}{|Q_{n-1}|\cdot|Q_n|}\right)$ 存在. 由 (13.4), 我们有

$$|f^{Q_n}-f^{Q_{n-1}}|\leqslant\varphi(l(Q_{n-1}))\psi^{-1}\left(\frac{C}{|Q_n|\cdot|Q_{n-1}|}\right). \tag{13.5}$$

而 $\varphi(l(Q_{n-1}))=2\varphi(l(Q_n))=4[\varphi(l(Q_n))-\varphi(l(Q_{n+1}))]$, 故

$$|f^{Q_n}-f^{Q_{n-1}}|\leqslant 4\psi^{-1}\left(\frac{C}{|Q_{n-1}|\cdot|Q_n|}\right)[\varphi(l(Q_n))-\varphi(l(Q_{n+1}))]. \tag{13.6}$$

如 $l(Q_{n+1}) \leqslant t \leqslant l(Q_n)$，则 $|Q_{n-1}| \cdot |Q_n| \geqslant |Q_n|^2 \geqslant t^4$，注意到 ψ^{-1}是（0，∞）上的增函数，得

$$\psi^{-1}\left(\frac{C}{|Q_{n-1}| \cdot |Q_n|}\right) \leqslant \psi^{-1}\left(\frac{C}{t^4}\right). \tag{13.7}$$

记 $V_n = l(Q_n)$，则对上式从 V_{n+1}到 V_n 关于 $d\varphi(t)$ 求积分，并利用（13.6），得

$$|f^{Q_n} - f^{Q_{n-1}}| \leqslant 4\int_{V_{n+1}}^{V_n} \psi^{-1}\left(\frac{C}{t^4}\right) d\varphi(t). \tag{13.8}$$

对 n 求和推得

$$\limsup_{n\to\infty} |f^{Q_n} - f^{Q_0}| \leqslant 4\int_0^{V_0} \psi^{-1}\left(\frac{C}{t^4}\right) d\varphi(t). \tag{13.9}$$

当 $Q_n \downarrow \{x\}$ 时，只要 x 不属于 R_t 中某个零测集 $K \subset R_t$，必定有 $f^{Q_n} \to f(x)$. 如果 $x, y \in R_t - K$，Q_0 是含 x，y 的最小正方形，则

$$|f(x) - f^{Q_0}| \leqslant 4\int_0^{|y-x|} \psi^{-1}\left(\frac{C}{t^4}\right) d\varphi(t). \tag{13.10}$$

关于 y 的相同不等式可用同样方法得到，从而得（13.2）. ∎

注意到 $x, y \in Q$ 时，$|x - y| \leqslant \sqrt{2}\, l(Q)$，$\psi$ 在$(0,\infty)$中增加以及对称性，有

$$\psi\left(\frac{f(y) - f(x)}{\varphi(l(Q))}\right) \leqslant \psi\left(\frac{f(y) - f(x)}{|y - x|/\sqrt{2}}\right).$$

由此得下面有用的不等式

12.14 系 设

$$\iint_{R_t R_t} \psi\left(\frac{f(y) - f(x)}{|y - x|/\sqrt{2}}\right) dx dy = C < \infty,$$

则存在勒贝格零测集 $K \subset R_t$，当 x，$y \in R_t - K$ 时，有（13.2）.

12.15 定理 Brown 单 W 具有连续修正，并且存在随机变量 X，满足 $E(e^{X^2}) < \infty$，使对任意 z，$z' \in R_t$，

$$|W(z) - W(z')| \leqslant 2\rho(|z - z'|) + X\sqrt{|z - z'|}, a.s. \tag{15.1}$$

其中 $\rho(t) = 16\int_0^t \left|\frac{\ln u}{2u}\right|^{1/2} du$. 此外，以概率 1 对所有 $z \in R_+^2$，

$$\limsup_{h\to 0} \frac{W(z + h) - W(z)}{\sqrt{2|h|\ln(1/|h|)}} \leqslant 32. \tag{15.2}$$

证 取 $\varphi(t)=\sqrt{2t}\ (0\leqslant t<\infty)$, $\psi(x)=e^{\frac{x^2}{4}}$，于是 $\psi^{-1}(x)=\sqrt{4\ln x}$. 如 $z,z'\in R_\epsilon$，则 $E[W(z)-W(z')]^2\leqslant\sqrt{2}\,|z-z'|$，故 $\dfrac{W(z)-W(z')}{\sqrt{\sqrt{2}\,|z-z'|}}$ 是均值为 0，方差为 $\sigma^2\leqslant 1$ 的 Gauss 过程，我们有

$$E\left\{\psi\left(\frac{W(z)-W(z')}{\varphi(|z-z'|/\sqrt{2})}\right)\right\}=E\exp\left\{\frac{[W(z)-W(z')]^2}{4\sqrt{2}\,|z-z'|}\right\}. \tag{15.3}$$

上式右方可直接计算得（注意 $\sigma^2\leqslant 1$）

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}+\frac{x^2}{4}\right)dx\leqslant\sqrt{2}. \tag{15.4}$$

取 W 的一个完全可分、可测修正，仍记为 W，利用 Fubini 定理得

$$E\left(\iint\limits_{R_\epsilon R_\epsilon}\psi\left(\frac{W(z)-W(z')}{|z-z'|/\sqrt{2}}\right)dzdz'\right)\leqslant\sqrt{2}. \tag{15.5}$$

记 B 为 (15.5) 中二重积分的值，于是 $EB\leqslant\sqrt{2}$. 故存在零概率集 N，当 $\omega\in\Omega-N$ 时，$B(\omega)<\infty$. 由系 12.14，存在勒贝格零集 $K(\omega)\subset R_\epsilon$，使当 $z,z'\notin K(\omega)$ 时，

$$|W(z,\omega)-W(z',\omega)|\leqslant 16\int_0^{|z-z'|}\sqrt{\ln\frac{B(\omega)}{t^4}}\,d\sqrt{2t}$$

$$\leqslant 16\sqrt{2\ln B(\omega)}\cdot|z-z'|^{1/2}+32\int_0^{|z-z'|}\sqrt{\frac{|\ln t|}{2t}}\,dt. \tag{15.6}$$

利用 Fubini 定理知，存在 R_ϵ 的稠子集 D，使对一切 z，$z'\in D$，(15.6) a.s. 成立. 所以 W 限制在 D 上是 a.s. 均匀连续的. 由于 D 是一个可分集，故 W 在 R_ϵ 上均匀连续. 利用 W 的尺度性质 12.9，对每个 Brown 单，必存在一个修正，它在 R_+^2 上 a.s. 连续，且对所有 z，$z'\in R_+^2$，(15.6) a.s. 成立.

为证 (15.1) (15.2)，只要注意，当 $h\to 0$ 时，$\dfrac{|h|}{2|h|\ln(1/|h|)}\to 0$ 和 $\dfrac{2\rho(|h|)}{\sqrt{2}|h|\ln(1/|h|)}\to 32$. ∎

12.16 注 (15.1) 右方的常数 2 还可以改进. Orey 和 Pruitt

证明了（15.1）右端可以用$\sqrt{2}$代替 2.

12.17 定理 对 Brown 单 W,

(i) $$\limsup_{s,t\to\infty}\frac{W(s,t)}{\sqrt{4st\ln\ln st}}=1, a.s. \tag{17.1}$$

(ii) $$\lim_{s,t\to 0}\frac{W(s,t)}{\sqrt{4st\ln\ln(1/st)}}=1, a.s. \tag{17.2}$$

这是重对数律. 定理 12.17 (i) 的证明留给读者. 由于 $stW_{\frac{1}{s},\frac{1}{t}}$ 是Brown 单，由 (i) 推出 (ii). ∎

§ 12.5 强马尔可夫性和反射原理

12.18 定理 设 $H=(H_1,H_2)$ 是弱停点. 则 $W^H=\{W^H(z), z\in R_+^2\}$ 是定义在 $\Omega_H=(H<\infty)$ 上的Brown 单,且与 $\mathring{\mathscr{F}}_H^*$ 独立. 这里 $W^H(z)=W(H,H+z]$.

证 不失一般性，可就有限弱停点 H 证明，即 $\Omega_H=\Omega$.

定义 $H^m=(H_1^m,H_2^m)$ 如下:

$$H_a^m=\frac{j}{2^m},\quad \text{如}\frac{j-1}{2^m}\leqslant H_a<\frac{j}{2^m}. \tag{18.1}$$

令 $Q=\{r_l\}$ 表示所有格子点 (j_12^{-m}, j_22^{-m}) 全体，则 $\{H^m=r_l\}\in\mathring{\mathscr{F}}_{r_l}^*$, $r_l\in Q$. 实际上, $(H^m=r_l)=(r'\leqslant H<r_l)$，其中 $r'\in Q$ 是 r_l 的第一个左下点，即 $r'=r_l-(2^{-m}, 2^{-m})$. 由于 $(H\geqslant r')\in\mathring{\mathscr{F}}_{r'}^*$, $(H<r_l)\in\mathring{\mathscr{F}}_{r_l}^*$, 所以 $(H^m=r_l)\in\mathring{\mathscr{F}}_{r_l}^*$. 由于 W 连续, 对任意 $z\in R_+^2$, $W(H,H+z]=\lim\limits_m W(H^m,H^m+z]$. 对任意 $A\in\mathring{\mathscr{F}}_H^*\subset\mathring{\mathscr{F}}_{H^m}^*$ 和 Borel 集 $B\subset R^1$，有

$$P\{W(H^m,H^m+z]\in B,A\}=\sum_l P\{W(r_l,r_l+z]\in B, A(H^m=r_l)\}. \tag{18.2}$$

但 $A(H^m=r_l)\in\mathring{\mathscr{F}}_{r_l}^*$，由白噪声的独立性质知上式右端等于

$$\sum_l P\{W(r_l, r_l + z] \in B\} P\{A(H^m = r_l)\}$$
$$= P\{W(z) \in B\} P(A).$$

当取 $A=\Omega$ 时，得 $P\{W(H^m, H^m + z] \in B\} = P\{W(z) \in B\}$. 由此得出：对每个 m，$\{W(H^m, H^m + z], z \in R_+^2\}$ 是与 $\mathring{\mathscr{F}}_H^*$ 独立的 Brown 单，从而 $\{W(H, H + z], z \in R_+^2\}$ 是与 $\mathring{\mathscr{F}}_H^*$ 独立的 Brown 单. ∎

利用上述强马氏性，可以证明 Brown 单的反射原理.

12.19 定理 固定矩形 $S = (z_0, z_1], z_0, z_1 \in R_+^2, z_0 < z_1$. 则对任意 $\lambda > 0$，有

$$P\{\sup_{(a,b]\subset S} W(a,b] \geqslant \lambda\} \leqslant 16 P\{W(S) \geqslant \lambda\}. \tag{19.1}$$

证 设 $z_0 = (u_0, v_0), z_1 = (u_1, v_1)$，$Q$ 表示正位矩形. 令 $T_1 = \inf\{u \geqslant u_0$：存在 $Q \subset S \cap R_u^1$，使得 $W(Q) \geqslant \lambda\}$. 因此，可在 $S \cap \{(u,v): u \leqslant T_1\}$ 内选取一矩形 Q，使 $W(Q) \geqslant \lambda$，并且 Q 的右边与 $\{(u,v): u = T_1, v \geqslant 0\}$ 共线. 记 $H = (T_1, v)$ 为 Q 的右下角点，我们有 $\{H \leqslant y\} = \{$存在 $Q \subset S \cap R_y^1$，使 $W(Q) \geqslant \lambda\} \in \mathring{\mathscr{F}}_y^*$，故 H 是弱停点.

设 Q' 为图 8 所示的矩形，则 $Q \cup Q'$ 的右边在直线 $\{(u,v): u = u_1, v \geqslant 0\}$ 上. 由于 H 是有限弱停点，依定理 12.18，$W(H, H + z)$ 与 $\mathring{\mathscr{F}}_H^*$ 独立. 由 $W(Q) \in \mathring{\mathscr{F}}_H^*$ 得 $W(Q)$ 与 $W(Q')$ 独立，$P\{W(Q') \geqslant 0 | \mathring{\mathscr{F}}_H^*\} = P\{W(Q') \geqslant 0\} = \frac{1}{2}$. 记 P_λ 为 (19.1) 左方的值，则 $P_\lambda = P\{W(Q) \geqslant \lambda\}$，我们有

$$P\{W(Q \cup Q') \geqslant \lambda\} \geqslant P\{W(Q) \geqslant \lambda, W(Q') \geqslant 0\}$$
$$= P\{W(Q) \geqslant \lambda\} P\{W(Q') \geqslant 0\} = \frac{1}{2} P_\lambda,$$
$$P_\lambda \leqslant 2P\{\sup_{\substack{(u,v)\in S\text{且} \\ v_0 \leqslant v \leqslant v' \leqslant v_1}} W((u,v),(u_1,v')] \geqslant \lambda\}. \tag{19.2}$$

现在我们只要研究矩形的右边与 S 的右边共线的情形. 记

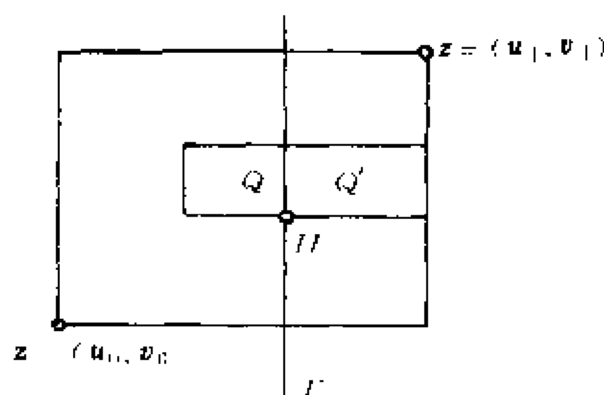


图 8

(19.2) 右方的概率为 q_λ，$p_\lambda \leqslant 2q_\lambda$.

令 $T_2=\inf\{v \geqslant v_0$：存在矩形 Q，其右边与 S 的右边共线，且 $W(Q) \geqslant \lambda\}$. 当 $T_2<v_1$ 时，存在一个矩形 Q，其上边与直线 $\{(u,v):v=T_2,u \geqslant 0\}$ 共线，如图 9 所示.

设矩形 Q' 如图 9 所示. 重复上面的论证得

$$q_\lambda = P\{W(Q) \geqslant \lambda\} \leqslant 2P\{W(Q \cup Q') \geqslant \lambda\}. \qquad (19.3)$$

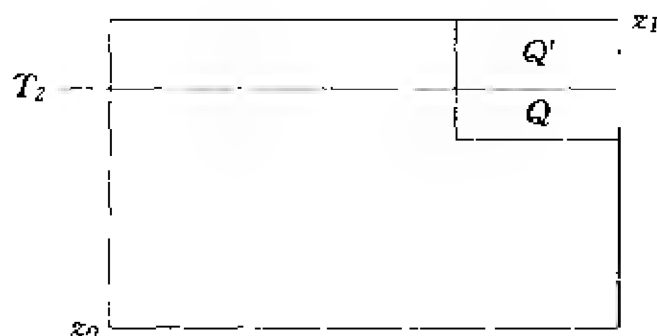


图9

其中 $Q \cup Q'$ 是形如 $((u,v),(u_1,v_1)]$ 的矩形，$(u,v) \in S$，矩形 $Q \cup Q'$ 的上边与右边分别地与 S 的上边和右边共线. 于是(19.3)成为

$$q_\lambda \leqslant 2P\{\sup_{(u,v)\in S} W((u,v),(u_1,v_1)] \geqslant \lambda\}. \qquad (19.4)$$

这样，我们只需研究矩形的上边和右边分别地与 S 的上边和右边共线的情形. 记 (19.4) 右方的概率为 r_λ，$q_\lambda \leqslant 2r_\lambda$.

利用变换 $u \to \frac{1}{u}$，$v \to \frac{1}{v}$，然后可以继续运用上述论证方法，首

先是矩形 $Q\cup Q'$，其左边与 S 的左边共线，如图 10；其次是矩形 $Q\cup Q'$，其下边与 S 的下边共线，如图 11. 而图 11 中的矩形 $Q\cup Q'$就是 S，从而得到

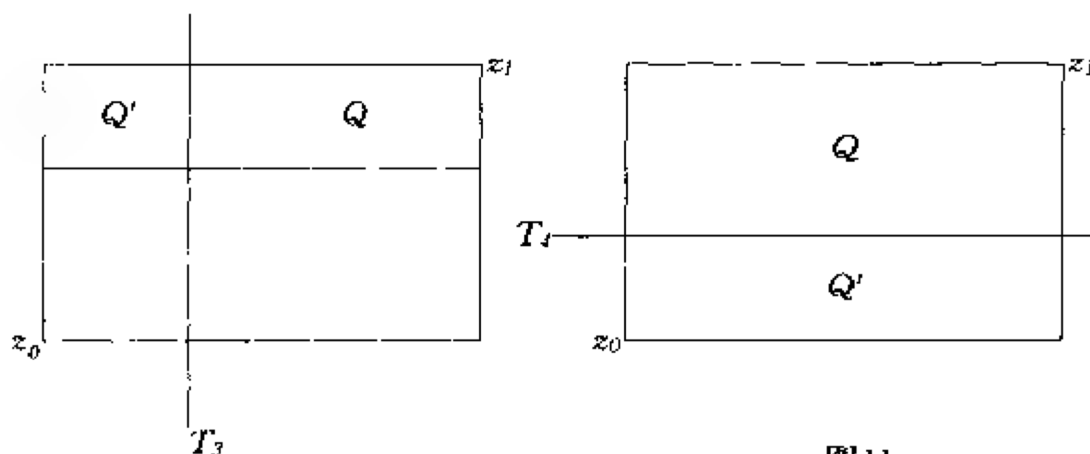


图10

图11

$$r_\lambda \leqslant 2P\{\sup_{(u_0,v)\in S} W((u_0,v),(u_1,v_1)] \geqslant \lambda\}. \tag{19.5}$$

记右方概率的值为 s_λ，从而

$$s_\lambda \leqslant 2P\{W((u_0,v_0),(u_1,v_1)] \geqslant \lambda\}. \tag{19.6}$$

记上式右方概率的值为 $t_\lambda = P\{W(S) \geqslant \lambda\}$. 综合 (19.2) — (19.6)，$p_\lambda \leqslant 2q_\lambda \leqslant 4r_\lambda \leqslant 8s_\lambda \leqslant 16t_\lambda$. ∎

运用同样的方法，可以证明

11.20 定理 设 z_0，$z_1 \in R_+^2$，$z_0 < z_1$，$S = (z_0, z_1]$. 则

$$P\{\sup_{z\in S}[W(z) - W(z_0)] \geqslant \lambda\} \leqslant 4P\{W(z_1) - W(z_0) \geqslant \lambda\}.$$

§12.6 奇点蔓延

在 Brown 单的研究中，轴方向有着特别重要的意义，任何非正常的事件都有沿着轴方向沿伸的趋势，事件越奇异，沿着轴方向蔓延就越强烈. 现就重对数律作为研究这方面的例子.

先回顾一下单参数 Brown 运动的重对数律.

12.21 定理 设 $B = \{B(t), t \geqslant 0\}$ 是（单参数）标准 Brown

运动. 则

(i) 对固定 $t\geqslant 0$,

$$\limsup_{h\downarrow 0}\frac{B(t+h)-B(t)}{\sqrt{2h\ln\ln(1/h)}}=1,\ a.s. \tag{21.1}$$

(ii) 对几乎一切 ω. 存在 $R_+^1=[0,\infty)$ 中稠密的非可数子集 $A(\omega)$, 使

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{B(t+h,\omega)-B(t,\omega)}{\sqrt{2h\ln\ln(1/h)}}=\infty,\ t\in A(\omega). \tag{21.2}$$

证 结论 (i) 是熟知的. 结论 (ii) 是由于 Brown 运动 B 的连续模是 $\sqrt{2h\ln(1/h)}$, 而非 $\sqrt{2h\ln\ln(1/h)}$. 实际上, Levy 已经证明: 如记 $d(h)=\sqrt{2h\ln(1/h)}$, 则对任意 $\varepsilon>0$ 及 $a<b$, 存在 $a<s_1<t_1<b$ 使 $|B(s_1,\omega)-B(t_1,\omega)|>(1-\varepsilon)d(t_1-s_1)$. 设已有 s_1, …, s_n 和 t_1, …, t_n, 取 $s_n'\in(s_n,t_n)$, 且 $s_n'\leqslant s_n+2^{-n}$, 并使 $|B(t_n,\omega)-B(s,\omega)|>\dfrac{n}{n+1}d(t_n-s)$ 对所有 $s\in(s_n,s_n')$ 成立, 由轨道 $B(\omega)$ 的连续性, 这样的 s_n' 必定存在. 其次, 取 $s_n<s_{n+1}<t_{n+1}<s_n'$, 使 $|B(t_{n+1},\omega)-B(s_{n+1},\omega)|>\dfrac{n+1}{n+2}d(t_{n+1}-s_{n+1})$. 取 $s_0\in\bigcap_n[s_n,t_n]$, 如果 $h_n=t_n-s_0$, 则 $|B(s_0+h_n,\omega)-B_{s_0}(\omega)|>\dfrac{n}{n+1}d(h_n)$, 因此

$$\limsup_{h\downarrow 0}\frac{|B(s_0+h,\omega)-B(s_0,\omega)|}{\sqrt{2h\ln(1/h)}}=1. \tag{21.3}$$

由于对每个区间 $(a,b)\subset R_+^1$ 中必有一个 s_0, 从而这样的 s_0 全体 $A(\omega)$ 在 R_+^1 上稠密, 非可数, 且 $t\in A(\omega)$ 时, (21.3) 成立. ∎

12.21′注 将上面的构造法稍作修改, 可以得到更强的结论: 对几乎一切 ω, 存在 $R_+^1=[0,\infty)$ 中稠密的非可数子集 A (与 ω 无关), 使 (21.2) 成立. 这只要将 (s_n, s_n') 分成三段, 去掉中间一段, 对其余两段施行上述步骤即可.

下面回到对 Brown 单的研究.

12.22 定理 固定 $s_0\geqslant 0$. 则以概率 1, 对任意 $t>0$, 成立

$$\limsup_{h\downarrow 0}\frac{|W(s_0+h,t)-W(s_0,t)|}{\sqrt{2h\ln\ln(1/h)}}=\sqrt{t}. \qquad (22.1)$$

证 由于 $\{W(s,t)/\sqrt{t},s\geqslant 0\}$ 是标准Brown运动，依重对数律知，对固定 $t>0$，(22.1) 以概率1成立. 由Fubini定理，以概率1，(22.1) 对几乎一切 $t>0$ 成立. 往证，以概率1，(22.1) 对一切 $t>0$ 成立.

记

$$L_t=\limsup_{h\downarrow 0}\frac{W(s_0+h,t)-W(s_0,t)}{\sqrt{2h\ln\ln(1/h)}}. \qquad (22.2)$$

易见 L_t 是 $\mathring{\mathscr{F}}_t^2$ 可选的，这是由于 L_t 是 $W(\cdot,t)$ 的可测函数，其中 $\{W(\cdot,t),t\geqslant 0\}$ 关于 $\mathring{\mathscr{F}}_t^2$ 适应且连续，$W(\cdot,t)$ 是可选的. 由Meyer截口定律. 如果 $P\{$存在 $t>0$，使 $L_t\neq\sqrt{t}\}>0$，则存在关于 $\mathring{\mathscr{F}}_t^2$ 的有限停时 τ，使 $P\{L_\tau\neq\sqrt{\tau}\}>0$. 令 $B(s,t)=W(s,\tau+t)-W(s,\tau)$，利用定理12.18于弱停点 $(0,\tau)$ 知，B 仍是一个Brown单. 如 $\delta>0$，我们有

$$|L_{\tau+\delta}-L_\tau|\leqslant\limsup_{h\downarrow 0}\frac{|B(s_0+h,\delta)-B(s_0,\delta)|}{\sqrt{2h\ln\ln(1/h)}}=\sqrt{\delta}. \qquad (22.3)$$

由此推知，如 $L_\tau(\omega)\neq\sqrt{\tau}$，则对足够小的 $\delta>0$ 有 $L_{\tau+\delta}\neq\sqrt{\tau+\delta}$，即存在一个正的Lebesgue可测集，使 $L_t\neq\sqrt{t}$. 此与前述以概率1对几乎一切 $t>0$ 成立 $L_t=\sqrt{t}$ 相矛盾. ∎

12.23 定理 固定 $t_0>0$. 设 S 是 $\mathring{\mathscr{F}}_t^2$ 可测的随机变量. 假定当 $t=t_0$ 时有

$$\limsup_{h\downarrow 0}\frac{W(S+h,t)-W(S,t)}{\sqrt{2h\ln\ln(1/h)}}=\infty,\ a.s. \qquad (23.1)$$

则当 $t\geqslant t_0$ 时，上式也成立.

证 令 $B(s,t)=W((S,t_0),(S+s,t_0+t)]$，注意 (S,t_0) 是弱停点，因此 B 是Brown单. 由定理12.22知，以概率1成立

$$\limsup_{h\downarrow 0}\frac{|B(s_0+h,t)-B(s_0,t)|}{\sqrt{2h\ln\ln(1/h)}}=\sqrt{t},$$
$$\text{对一切 } t>0. \tag{23.2}$$

这样，如 $t'=t_0+t$，则

$$\limsup_{h\downarrow 0}\frac{|W(S+h,t')-W(S,t')|}{\sqrt{2h\ln\ln(1/h)}}$$
$$\geqslant\limsup_{h\downarrow 0}\frac{|W(S+h,t_0)-W(S,t_0)|}{\sqrt{2h\ln\ln(1/h)}}$$
$$-\limsup_{h\downarrow 0}\frac{|B(h,t)-B(0,t)|}{\sqrt{2h\ln\ln(1/h)}}$$
$$=\infty-\sqrt{t}=\infty. \quad \blacksquare$$

12.24 注 R_+^2 中使重对数律不成立的点，称为 W 的奇点. 定理 12.23 表明：奇点可沿着垂直方向蔓延. 我们可以直观地把这些蔓延的奇点视为裂缝，则 Brown 单的裂缝平行于轴的方向.

12.25 注 可以证明：使 $\limsup_{h\downarrow 0}\frac{W(s+h,t)-W(s,t)}{\sqrt{2h\ln(1/h)}}>1-\varepsilon$ 的奇点沿垂直方向蔓延一小段.

12.26 注 设 S_t 是 (22.1) 的左方极限为∞的 s_0 的集合. 自然会问：是否包含了所有奇点蔓延？即 $t\leqslant t'\Rightarrow S_t\subset S_{t'}$？答案是否定的. 实际上，可以证明：给定 $0<t_0<t_1$，存在 s_0，使得对所有 t_0 和 t_1 间的 t，(22.1) 成立，并且对所有 $t<t_0$ 和 $t>t_1$，(22.1) 不成立.

§12.7 Levy 马氏性

设 D 是 R_+^2 上有逐段光滑边界的开集. 定义

$$\mathscr{G}_D^+=\bigcap_n\sigma\{W(z),z\in O_n^+\},\mathscr{G}_D^-=\bigcap_n\sigma\{W(z),z\in O_n^-\},$$
$$\Gamma_1(D)=\{R_z:z\in\partial D\}.$$

$\Gamma_2(D)=\{V:V\subset R_+^2$ 是曲边梯形，左、右两边平行于 t 坐标轴，上边是 ∂D 的一段，下边是 s 坐标轴的一段$\}$，

$\Gamma_3(D)=\{V:V\subset R_+^2$ 是曲边梯形，上、下两边平行于 s 坐标

轴，右边是 ∂D 的一段，左边是 t 坐标轴的一段}

$$\Gamma(D) = \Gamma_1(D) \cup \Gamma_2(D) \cup \Gamma_3(D).$$

$$\mathscr{G}^*(D) = \sigma\{W(V); V \in \Gamma(D)\},$$

$$\mathscr{G}^{*+}(D) = \sigma\{W(D \cap V); V \in \Gamma(D)\},$$

$$\mathscr{G}^{*-}(D) = \sigma\{W(D' \cap V); V \in \Gamma(D)\}.$$

显然，$\mathscr{G}^{*+}(D)$ 与 $\mathscr{G}^{*-}(D)$ 相互独立，$\mathscr{G}^*(D) = \mathscr{G}^{*+}(D) \vee \mathscr{G}^{*-}(D)$.

12.27 定理 设 $D \subset R_+^2$ 是有逐段光滑边界的开集，则

$(\mathring{\mathscr{F}}(D), \mathring{\mathscr{F}}(D') | \mathscr{G}^*(D))$.

证 由于所涉及的 σ 域均由 Gauss 随机变量生成，因此其独立性和正交性一致. 为证定理结论，只要证：对任意 $z \in D'$，有

$$E\{W(z) | \mathring{\mathscr{F}}(D) \vee \mathscr{G}^*(D)\} = E\{W(z) | \mathscr{G}^*(D)\}. \tag{27.1}$$

但 $\mathscr{G}^*(D) \subset \mathring{\mathscr{F}}(D)$（见下面的定理 12.28），故只需证明：对 $z \in D'$，

$$E\{W(z) | \mathring{\mathscr{F}}(D)\} = E\{W(z) | \mathscr{G}^*(D)\}. \tag{27.2}$$

为方便计，记号 $\mathscr{G}^*(D)$，$\mathscr{G}^{*+}(D)$，$\mathscr{G}^{*-}(D)$ 也表示由相应的随机变量（例如，$\mathscr{G}^*(D)$ 相应于 $\{W(V): V \in \Gamma(D)\}$）所形成的 H-ilbert空间，并且不混淆时省写 D. 这样，我们有 $\mathscr{G}^* = \mathscr{G}^{*+} + \mathscr{G}^{*-}$，$\mathscr{G}^{*+} \perp \mathscr{G}^{*-}$. 令 $\mathscr{H}(D) = \{W(A): A \subset D, A$ 是 Borel 集}.

显然有 $\mathring{\mathscr{F}} = \mathscr{H} + \mathscr{G}^* = \mathscr{H} + \mathscr{G}^{*-}$（因 $\mathscr{G}^{*+} \subset \mathscr{H}$），且 $\mathscr{H} \perp \mathscr{G}^{*-}$.

将 $W(z)$ 分解成两部份：$W(z) = W^-(z) + W^+(z)$，其中 $W^+(z) = W(R_z \cap D)$，$W^-(z) = W(R_z \cap D')$，则 $W^- \perp \mathscr{H}$，而 $W^+ \in \mathscr{G}^{*+} \subset \mathscr{H}$，因此

$$E\{W(z) | \mathscr{H} + \mathscr{G}^{*-}\} = W^+ + E\{W^- | \mathscr{H} + \mathscr{G}^{*-}\}. \tag{27.3}$$

注意到$W^{-}(z)\perp\mathscr{H}$,(27.3)右端最后一式正是W 在$\mathscr{G}^{*-}$上的投影.因此,(27.3)左端条件期望是$\mathscr{G}^{*-}+\mathscr{G}^{*+}=\mathscr{G}^{*}$可测的,由此得(27.2). ∎

12.28 定理 设D同定理12.27.则$\mathring{\mathscr{F}}(D)\cap\mathring{\mathscr{F}}(D')=\mathscr{G}^{*}(D)=\mathscr{G}^{+}(D)\cap\mathscr{G}^{-}(D)$,因此,$\mathscr{G}^{*}(D)$是$\mathring{\mathscr{F}}(D)$和$\mathring{\mathscr{F}}(D')$的最小分裂$\sigma$域.

证 由定理1.33 (i) 和定理12.27知$\mathscr{G}^{*}(D)\supset\mathring{\mathscr{F}}(D)\cap\mathring{\mathscr{F}}(D')$. 往证反向包含成立. 设$V\in\Gamma(D)$, 由于$V$可用有限个正位矩形的并逼近, 这些矩形或者是$R_z$, 或者是两个$R_z$之差, 其中$z\in D$, 且$d(z,\partial D)<\frac{1}{n}$. 因此推得$W(V)$是关于$\sigma\{W(z): z\in D, d(z,\partial D)<\frac{1}{n}\}$可测的,从而关于$\mathscr{G}^{+}(D)$可测. 类似证明关于$\mathscr{G}^{-}(D)$可测. 这就证明了$\mathscr{G}^{*}(D)\subset\mathscr{G}^{-}(D)\cap\mathscr{G}^{-}(D)$. 由于$\mathscr{G}^{-}(D)\cap\mathscr{G}^{-}(D)\subset\mathring{\mathscr{F}}(D)\cap\mathring{\mathscr{F}}(\partial D)\cap\mathring{\mathscr{F}}(D')$,从而定理得证. ∎

自然会问:定理12.27中分裂σ域$\mathscr{G}^{*}(D)$是否等于$\mathring{\mathscr{F}}(\partial D)$?如果$D$是矩形或矩形的并,则有$\mathscr{G}^{*}(D)=\mathring{\mathscr{F}}(\partial D)$.但对其他类型的$D$,却未必.下面是一个反例.

12.29 例 设D是顶点为(0,0),(0,1),(1,0)的三角形.由于W在轴λ_0上为0,故$\mathring{\mathscr{F}}(\partial D)=\sigma\{W(s,1-s),0\leqslant s\leqslant 1\}$,但$\mathring{\mathscr{F}}(\partial D)$并不是$\mathring{\mathscr{F}}(D)$和$\mathring{\mathscr{F}}(D')$的分裂域.

实际上,考虑$W(D)$,它是$\mathscr{G}^{*}(D)$可测的.往证$W(D)$不是$\mathring{\mathscr{F}}(\partial D)$可测的.记$\hat{D}=E\{W(D)\mid\mathring{\mathscr{F}}(\partial D)\}$.由Gauss随机变量性质,$\hat{D}$是$W(s,1-s)$的线性组合的极限,并由下式确定

$$E\{[W(D)-\hat{D}]W(s,1-s)\}=0,\ 0\leqslant s\leqslant 1. \quad (29.1)$$

由此得$\hat{D}=2\int_0^1 W(u,1-u)du$,这可直接验证之:

$$E\{[W(D)-\tilde{D}]W(s,1-s)\}$$
$$=s(1-s)-2\int_0^s(1-s)udu-2\int_s^1 s(1-u)du=0.$$

但 $\tilde{D}\neq W(D)$. 实际上,$E[\tilde{D}W(D)]=2\int_0^1 u(1-u)du=\frac{1}{3}$,而 $E[W(D)]^2=\frac{1}{2}$.

12.30 非0非1律 Brown 单的 Levy 马氏性不成立的事实表明：在某种意义下，通常的马氏 0—1 律不成立，即存在一些事件，它们在边界的芽 σ 域中而不在边界 σ 域中，其概率非 0 非 1.

12.30′注 考虑射线 $t=s$, $s\geqslant 0$, 则单参数过程 $\widetilde{W}=\{W(s,s),s\geqslant 0\}$ 是连续鞅. 由 §12.6 的讨论知,$\widetilde{W}$ 的奇异点存在,在奇异点 s, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{W(s+h,s+h)-W(s,s)}{\sqrt{2h\ln\ln(1/h)}}=\infty$. 设 S 是 $\mathring{\mathscr{F}}(\partial D)$可测随机变量，且对几乎一切 W, $S(\omega)$ 是 $\tilde{\omega}$ 的奇异点(这样的 S 可以找到). 记 $W(s,s)=W^1(s)+W^2(s)$,其中 $W^1(s)=W(D_s)$,而 $D_s=\{(u,v)\in R^2_+;v\leqslant u\leqslant s\}$. $W^1(s)$ 和 $W^2(s)$ 是独立的鞅. 如果 S 是 $\widetilde{W}$ 的奇异点，则它一定是 W^1 和 W^2 的奇异点. 修改定理 12.23 的证明，我们可以证明：如果 S 是 W^1 的奇异点，则它是垂直蔓延的奇异点；如果 S 是 W^2 的奇异点，则它是水平蔓延的奇异点. 对称地，如果 S 是 $\sigma\{W(s,s):s\geqslant 0\}$ 可测的，则水平奇异点蔓延的概率等于垂直奇异点蔓延的概率.

§12.8 水平曲线

考虑 W 的水平曲线 $G_c=\{z\in R^2_+;W(z)=c\}$, c 是实数. 下面是关于 G_c 的结构的一个有意义的局部性结果.

12.31 定理 设 $z\in R^2_+-\lambda_0$. 以概率 1,过 z 的水平曲线 G_c 在 z 处是完全不连通的.

证 不失一般性，假定 $z=(1,1)$. 设 S_h 是中心为 (1，1)，边长为 $2h$ 的正方形的边界，$\widetilde{S}_h$ 是 $[0,2h]\times[0,2h]$ 的边界.

令 $J_h = \{W(1,1) > \sup\limits_{z\in S_h} W(z)\}$. 由于在 J_h 上 $\{z: W(z) = W(1,1)\}$ 与 S_h 不相交，故只需证：对几乎一切 ω，存在一列 $h\to 0$，使 $\omega\in J_h$.

显然 $P(J_h) > 0$，往证

$$\lim_{h\to 0} P(J_h) = P(J_1) > 0. \tag{31.1}$$

设 $u=s-1+h$，$v=t-1+h$，对 u，$v\geqslant 0$，记

$$\hat{W}(u,v) = W((1-h,1-h),(s,t)],$$

$$B_u^1 = (1-h)^{1/2}[W(s,1-h) - W(1-h,1-h)],$$

$$B_v^2 = (1-h)^{1/2}[W(1-h,t) - W(1-h,1-h)],$$

则 $\hat{W}$ 是 Brown 单，B^1，B^2 是标准 Brown 运动，它们是相互独立的，且

$$J_h = \{\hat{W}_{h,h} > \sup_{(u,v)\in S_h}[\hat{W}(u,v) + \sqrt{1-h}(B_u^1 - B_h^1 + B_v^2 - B_h^2)]\}. \tag{31.2}$$

记 $\widetilde{W}(u,v) = h\hat{W}\left(\frac{u}{h},\frac{v}{h}\right)$，$\widetilde{B}_u^i = \sqrt{h}\,B^i_{\frac{u}{h}}\ (i=1,2)$，则(31.2)成为

$$J_h = \{\hat{W}(1,1) > \sup_{(u,v)\in \widetilde{S}_1}[\widetilde{W}(u,v) + \sqrt{h(1-h)}(\widetilde{B}_u^1 - \widetilde{B}_1^1 + \widetilde{B}_v^2 - \widetilde{B}_1^2)]\},$$

但 $\widetilde{W}$ 是 Brown 单，$\widetilde{B}^i$ 是标准 Brown 运动，它们相互独立，而且上确界是在不依赖于 h 的 $\widetilde{S}_1$ 上，由于当 $h\to 0$ 时，

$$\sqrt{h(1-h)}.\ \sup_{(u,v)\in \widetilde{S}_1}(\widetilde{B}_u^1 - \widetilde{B}\ + \widetilde{B}_v^2 - \widetilde{B}_1^2) \to 0\text{，我们有}$$

$$\lim_{h\to 0} P(J_h) = P\{\widetilde{W}(1,1) > \sup_{(u,v)\in \widetilde{S}_1}\widetilde{W}(u,v)\} = P(J_1).$$

(31.1) 得证.

由于 $J = \limsup\limits_{n\to\infty} J_{\frac{1}{n}}$ 关于 $\bigcap\limits_{\varepsilon>0}\sigma\{W(z) - W(1,1): |z-(1,1)| < \varepsilon\}$（它是平凡的）可测，故 $P(J) = 0$ 或 1. 但 $P(J) > 0$，所以 $P(J) = P\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} J_{\frac{1}{n}}\right) = 1$. ■

12.32 注 定理 12.31 表明：以概率 1，W 的水平曲线在指定点是完全不连通的. 但并未证明水平曲线是一个完全不连通集. 事

实上，由于它是非平凡开集 $\{z: W(z) > W(1,1)\}$ 的边界，从一般的拓扑考虑，它不可能是完全不连通的.

研究 W 的水平曲线的整体结构，将是一件有意义的工作.

§12.9 广义 Brown 单

关于 Brown 单的定义 12.5 可适当推广.

12.33 定义 设测度 $F \in m$（见第 11 章（1.1）式）. 称 $W = \{W(z), z \in R_+^2\}$ 为广义 Brown 单，如果 W 是均值为 0 的 *Gauss* 过程，且对 z_1，$z_2 \in R_+^2$，

$$EW(z_1)W(z_2) = F(0, z_1 \wedge z_2]. \tag{33.1}$$

称 F 为 W 的强度测度.

特殊情形：F 关于 Lebesgue 测度绝对连续时，有密度函数 $f(z) \equiv f(s,t)$；f 可分离变数，即 $f(s,t) = f_1(s)f_2(t)$. 当 $f(z) \equiv 1$ 时，广义 Brown 单就化为 Brown 单.

研究广义 *Brown* 单，是很有意义的，见张润楚 [1].

13 两参数 Ornstein-Uhlenbeck 过程

§13.1 定义

13.1 定义 设 $W=\{W(a), a\geqslant 0\}$ 是(单参数)标准 Brown 运动，$\alpha>0$，$\sigma>0$ 是两个常数，X_0 是与 W 独立的随机变数. 则随机微分方程

$$\begin{cases} dX(a) = -\alpha X(a)da + \sigma dW(a), \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

有唯一解

$$X(t) = e^{-\alpha t}\left[X_0 + \sigma\int_0^t e^{\alpha a}dW(a)\right]. \tag{1.2}$$

称 $X=\{X(t), t\geqslant 0\}$ 为单参数的、一维的（取值于 R^1）Ornstein－Uhlenbeck 过程，简记为 OUP_1.

OUP_1 是 Brown 运动粒子的速度的数学模型，是重要的一类齐次马氏过程. 如果 X_0 有 $N\left(0, \dfrac{\sigma^2}{2\alpha}\right)$ 正态分布，则它是平稳过程，如果 X_0 是常数，或有正态分布，它还是正态过程.

很自然地要引入 n 参数、d 维 Ornstein－Uhlenbeck 过程，简记为 OUP_n^d，其定义见王梓坤［5］. 但本章只研究 OUP_2^1.

13.2 定义 设 $W=\{W(z), z\in R_+^2\}$ 是 Brown 单，X_0 是与 W 独立的随机变数，$\alpha>0$，$\beta>0$，$\sigma>0$ 为常数. 对 $z\in R_+^2$，$z=(s, t)$，令

$$X(z) = e^{-\alpha s-\beta t}\left[X_0 + \sigma\int_0^s\int_0^t e^{\alpha a+\beta b}dW(a,b)\right]. \tag{2.1}$$

称 $X=\{X(z), z\in R_+^2\}$ 为两参数、一维 Ornstein－Uhlenbeck 过

程，简记为 OUP_2.

OUP_2 与 Poisson 单、Brown 单一样，同样是两参数马氏过程中最基本、最典型的过程之一. 但 OUP_2 与 Poisson 单、Brown 单不同，它不具有独立增量. 因此，对 OUP_2 的研究，同样可以作为研究更一般的特别是连续型的两参数马氏过程的很好的前导.

§13.2 基本性质

记 $J=\{J(s,t);(s,t)\geqslant(0,0)\}$，其中

$$J(s,t)=\int_0^s\int_0^t e^{\alpha a+\beta b}dW(a,b). \tag{2.2}$$

显然 J 是两参数正态过程. 而且

$$X(s,t)=e^{-\alpha s-\beta t}[X_0+\sigma J(s,t)]. \tag{2.3}$$

设 $z=(s,t)$，$z_1=(s_1,t_1)$，$z_2=(s_2,t_2)$ 均 $\in R_+^2$，记 $s=s_1\vee s_2$，$\underline{s}=s_1\wedge s_2$，$I_s$ 是$[0,s]$的示性函数. 由于 W 是 Brown 单，故 $EJ(s,t)=0$，又

$$\begin{aligned}
&EJ(s_1,t_1)J(s_2,t_2)\\
&=E\left\{\left[\int_0^s\int_0^t I_{s_1}(a)I_{t_1}(b)e^{\alpha a+\beta b}dW(a,b)\right]\right.\\
&\quad\left.\cdot\left[\int_0^s\int_0^t I_{s_2}(a)I_{t_2}(b)e^{\alpha a+\beta b}dW(a,b)\right]\right\}\\
&=\int_0^s\int_0^t I_{\underline{s}}(a)I_{\underline{t}}(b)e^{2\alpha a+2\beta b}da\,db\\
&=\left(e^{2\alpha(s_1\wedge s_2)}-1\right)\left(e^{2\beta(t_1\wedge t_2)}-1\right)/4\alpha\beta.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

特别地，$J(s,t)$ 的方差

$$DJ(s,t)=(e^{2\alpha s}-1)(e^{2\beta t}-1)/4\alpha\beta. \tag{2.5}$$

13.3 定理　下列三过程等价（即有相同的有限维分布）：

(i) X 是 OUP_2.

(ii) $\overline{X}=\{\overline{X}(s,t),(s,t)\geqslant(0,0)\}$，其中

$$\overline{X}(s,t)=e^{-\alpha s-\beta t}\left[X_0+\sigma W\left(\frac{e^{2\alpha s}-1}{2\alpha},\frac{e^{2\beta t}-1}{2\beta}\right)\right].$$

(iii) $\widetilde{X}=\{\widetilde{X}(s,t),(s,t)\geqslant(0,0)\}$，其中

$$\tilde{X}(s,t)=e^{-\alpha s-\beta t}X_0+\sigma W\left(\frac{1-e^{-2\alpha s}}{2\alpha},\frac{1-e^{-2\beta t}}{2\beta}\right)e^{\alpha s+\beta t}.$$

证 令 $Y(s,t)=W\left(\frac{e^{2\alpha s}-1}{2\alpha},\frac{e^{2\beta t}-1}{2\beta}\right)$,则 $Y=\{Y(s,t),(s,t)\geqslant(0,0)\}$ 是正态过程,$EY(s,t)=0$. 由于

$$E\{Y(s_1,t_1)Y(s_2,t_2)\}=\left(\frac{e^{2\alpha s_1}-1}{2\alpha}\wedge\frac{e^{2\alpha s_2}-1}{2\alpha}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{e^{2\beta t_1}-1}{2\beta}\wedge\frac{e^{2\beta t_2}-1}{2\beta}\right)=EJ(s_1,t_1)J(s_2,t_2).$$

故 J 与 Y 有相同的有穷维分布,从而 X 与 $\overline{X}$ 等价. 类似证 X 与 $\tilde{X}$ 等价. ∎

13.4 注 设 $Z=\{Z(s,t),(s,t)\geqslant(0,0)\}$,其中

$$Z(s,t)$$
$$=e^{-\alpha s-\beta t}X_0+\sigma\sqrt{(1-e^{-2\alpha s})(1-e^{-2\beta t})/4\alpha\beta}\,W(1,1). \tag{4.1}$$

则 Z 与 X 有相同的一维分布,但相关函数不同.

对任意 $Q\in\mathscr{B}(R_+^2)$,令

$$J(Q)=\iint\limits_Q e^{\alpha a+\beta b}dW(a,b). \tag{4.2}$$

13.5 命题 设 $(u,v)\leqslant(s,t)$. 则

$$X(s,t)=e^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}X(u,v)+\sigma e^{-\alpha s-\beta t}J(A\cup B\cup C). \tag{5.1}$$

其中三矩形 $A=[0,u]\times[v,t]$, $B=[u,s]\times[v,t]$, $C=[u,s]\times[0,v]$.

证 由 (2.2) (2.3) 有

$$X(s,t)=e^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}\{e^{-\alpha u-\beta v}[X_0+\sigma J(u,v)]$$
$$+\sigma e^{-\alpha u-\beta v}J(A\cup B\cup C)\}$$
$$=e^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}X(u,v)+\sigma e^{-\alpha s-\beta t}J(A\cup B\cup C).$$ ∎

(5.1) 是 (2.1) 的推广,它把 X 在任意两点 $(u,v)\leqslant(s,t)$ 的值联系起来.

13.6 命题 设 $(u,v)<(s,t)$. 则

$$X(s,t)=e^{-\alpha(s-u)}X(u,t)+e^{-\beta(t-v)}X(s,v)$$

$$-e^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}X(u,v)$$
$$+\sigma e^{-\alpha s-\beta t}J((u,v),(s,t)]. \qquad (6.1)$$

证 由(2.1)(2.2)有

$$X(s,t)=e^{-\alpha s-\beta t}\{e^{-\alpha s-\beta v}[X_0+\sigma J(s,v)-\sigma J(s,v)]e^{\alpha s+\beta v}$$
$$+e^{-\alpha u-\beta t}[X_0+\sigma J(u,t)-\sigma J(u,t)]e^{\alpha u+\beta t}$$
$$-e^{-\alpha u-\beta v}[X_0+\sigma J(u,v)-\sigma J(u,v)]e^{\alpha u+\beta v}+\sigma J(s,t)\}$$
$$=e^{-\alpha(s-u)}X(u,t)+e^{-\beta(t-v)}X(s,v)-e^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}X(u,v)$$
$$+\sigma e^{-\alpha s-\beta t}J((u,v),(s,t)]. \qquad ∎$$

§ 13.3 各种马氏性

令 $\mathscr{F}_z=\sigma\{X_0,W(y),y\leqslant z\}$，则 X 是$(\mathscr{F}_z,z\in R_+^2)$适应的.

13.7 引理 OUP_2 是 A 过程.

证 由命题 13.6 和定义 3.42 得出. ∎

13.8 定理 X 是规则宽过去马氏过程，其齐次三点转移函数族 $\mathscr{P}=\{P(s,t;x,y,z,B):(s,t)>(0,0),x,y,z\in R,B\in\mathscr{B}(R)\}$：

$$P(s,t;x,y,z,B)=\int_B f(s,t;x,y,z,\xi)d\xi, \qquad (8.1)$$

而三点转移密度

$$f(s,t;x,y,z,\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}H_1}exp\{-|\xi+e^{-\alpha s-\beta t}x$$
$$-e^{-\alpha s}y-e^{-\beta t}z|^2/2H_1^2\}, \qquad (8.2)$$

$$H_1=\sigma\sqrt{(1-e^{-2\alpha s})(1-e^{-2\beta t})/4\alpha\beta}. \qquad (8.3)$$

证 由引理 13.7 及定理 3.43 得 X 有宽过去马氏性，因而下面 (8.4) 的第一个等号成立. 往证下面的第二等号也成立：

$$P\{X(u+s,v+t)\in B|\mathscr{F}_{uv}^*\}=P\{X(u+s,v+t)$$
$$\in B|X(u,v),X(u,v+t),X(u+s,v)\}$$
$$=\int_B f(s,t;X(u,v),X(u,v+t),X(u+s,v),\xi)d\xi. \qquad (8.4)$$

由此及定理 5.16 得 X 是规则的宽过去马氏过程.

由于 $J((u,v),(u+s,v+t)]$ 与 $\mathscr{F}_{uv}^*$ 独立，更与 $X(u,v)$，

$X(u,v+t)$, $X(u-s,v)$ 独立，故条件 $X(u,v)=x$、$X(u,v+t)=y$, $X(u+s,v)=z$ 不影响 $J((u,v),(u+s,v+t)]$ 的分布. 在此条件下，由(6.1)知 $X(u+s,v+t)$ 有正态分布，而且

$$EX(u+s,v+t) = -e^{-\alpha s-\beta t}x + e^{-\alpha s}y + e^{-\beta t}z,$$

$$\begin{aligned} &DX(u+s,v+t) \\ &= \sigma^2 e^{-2\alpha(s+u)-2\beta(v+t)} DJ((u,v),(u+s,v+t)] \\ &= \sigma^2 e^{-2\alpha(u+s)-2\beta(v+t)} \int_u^{u+s} e^{2\alpha a}da \int_v^{v+t} e^{2\beta b}db = H_1^2. \end{aligned}$$

故在条件 $X(u,v)=x$, $X(u,v+t)=y$, $X(u-s,v)=z$ 下，$X(u+s,v+t)$ 的分布密度为 $f(s,t;x,y,z,\xi)$. 故得(8. 4)的第二等号成立. ∎

13.9 定理 X 具有 $*$ 马氏性.

证 由定理 13.8 和定理 3.44 得出. ∎

13.10 定理 X 有单点马氏性，其单点转移函数 $P((u,v),x;(s,t),B)$, $(0,0)\leqslant(u,v)\leqslant(s,t)$, $x,y\in R^1$, 有密度函数

$$\begin{aligned} &f((u,v),x;(s,t),y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}H}\exp\left\{-\frac{(y-xe^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)})^2}{2H^2}\right\}. \end{aligned} \tag{10.1}$$

其中 $H^2 = \frac{\sigma^2}{4\alpha\beta}[e^{-\alpha(s-u)}(1-e^{-2\alpha u})(1-e^{-2\beta(t-v)})$
$$+e^{-2\beta(t-v)}(1-e^{-2\beta v})(1-e^{-2\alpha(s-u)})$$
$$+(1-e^{-2\alpha(s-u)})(1-e^{-2\beta(t-v)})].$$

证 因 $*$ 马氏性蕴含单点马氏性，故第一结论由定理 13.9 得出. 下面证 (10.1).

注意 (5.1) 右方两项相互独立，当 $X(u,v)=x$ 时，$X(s,t)$ 有正态分布，而且

$$EX(s,t) = e^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}x,$$

$$DX(s,t) = \sigma^2 e^{-2\alpha s-2\beta t}[DJ(A)+DJ(B)+DJ(C)]. \tag{10.2}$$

而

$$DJ(A) = E\left[\int_0^u\int_v^t e^{\alpha a+\beta b}dW(a,b)\right]^2$$

$$= \int_0^u \int_v^t e^{2\alpha a+2\beta b} da db = (e^{2\alpha u} - 1)(e^{2\beta t} - e^{2\beta v})/4\alpha\beta.$$

同理

$$DJ(B) = (e^{2\alpha s} - e^{2\alpha u})(e^{2\beta t} - e^{2\beta v})/4\alpha\beta,$$
$$DJ(C) = (e^{2\alpha s} - e^{2\alpha u})(e^{2\beta v} - 1)/4\alpha\beta.$$

代入 (10.2) 得 (10.1). ▌

§13.4 在射线上的导出过程

设 X 为 OUP_2 并考虑 R^2 上的射线 l：$t=\lambda s+c$，$s\geqslant 0$，常数 $c\geqslant 0$，$\lambda\geqslant 0$. X 在 l 上的导出过程为 $Y=\{Y(s), s\geqslant 0\}$，这里 $Y(s)=X(s,\lambda s+c)$.

13.11 引理 设 Y、Z 是两个独立随机变量，$EZ=0$. 如 $Y=Z$，a.s.，则 $Y=Z=0$. a.s.

证 $EZ^2 = EZY = (EZ)(EY) = 0$，故 $Z=0$，a.s. ▌

13.12 定理 导出过程 Y 是某个 OUP_1 的充要条件是 $\lambda=0$ 且 $c>0$.

证 必要性 由命题 13.5 知

$$Y(s) = X(s,\lambda s + c) = e^{-\alpha s-\beta\lambda s}X(0,c)$$
$$+ \sigma e^{-(\alpha+\beta\lambda)s-\beta c}\int_0^s\int_0^{\lambda s+c} e^{\alpha a+\beta b}dw(a,b). \qquad (12.1)$$

$$Y(0) = X(0,c) = e^{-\beta c}X_0. \qquad (12.2)$$

令

$$J_1(s) = e^{-(\alpha+\beta\lambda)s-\beta c}\int_0^s\int_0^{\lambda s+c} e^{\alpha a+\beta b}dW(a,b). \qquad (12.3)$$

由(12.2)知 $X(0,c)$ 与 W 独立，从而 $X(0,c)$ 与 $J_1(s)$ 相互独立. 如 Y 为某一 OUP_1，由(1.2)，

$$Y(s) = e^{-\tilde{\alpha}s}X(0,c) + \sigma d e^{-\tilde{\alpha}s}\int_0^s e^{\tilde{\alpha}a}d\widetilde{W}(a). \qquad (12.4)$$

其中，d 和 $\tilde{\alpha}$ 是与 $\alpha,\beta,\lambda,c,\sigma$ 有关的待定正常数，$\widetilde{W}$ 是标准 Brown 运动，与 $X(0,c)$ 独立. 令

$$J_2(s) = d e^{-\tilde{\alpha}s}\int_0^s e^{\tilde{\alpha}a}d\widetilde{W}(a). \qquad (12.5)$$

由 (12.1),(12.4),(12.5) 知，对任意 $s\geqslant 0$ 有

$$(e^{-\tilde{\alpha}s} - e^{-(\alpha+\beta\lambda)s})X(0,c) = \sigma[J_1(s) - J_2(s)].$$

由引理 13.11，对任意 $s\geqslant 0$ 有

$$J_1(s) = J_2(s), \qquad a.s. \tag{12.6}$$

而

$$EJ_1^2(s) = \frac{1}{4\alpha\beta}e^{-2(\alpha+\beta\lambda)s-2\beta c}(e^{2\alpha s} - 1)(e^{2\beta(\lambda s+c)} - 1). \tag{12.7}$$

$$EJ_2^2(s) = \frac{d^2}{2\tilde{\alpha}}e^{-2\tilde{\alpha}s}(e^{2\tilde{\alpha}s} - 1). \tag{12.8}$$

于是由(12.6)—(12.8),对任意 $s \geqslant 0$ 有

$$\frac{1}{4\alpha\beta}e^{-2(\alpha+\beta\lambda)s-2\beta c}(e^{2\alpha s} - 1)(e^{2\beta(\lambda s+c)} - 1)$$

$$= \frac{d^2}{2\tilde{\alpha}}e^{-2\tilde{\alpha}s}(e^{2\tilde{\alpha}s} - 1). \tag{12.9}$$

在(12.9) 两边对 s 求一阶导数后令 $s = 0$ 得

$$\frac{1}{2\beta}(1 - e^{-2\beta c}) = d^2 \tag{12.10}$$

在(12.9) 两边对 s 求二阶导数后令 $s = 0$ 得

$$-\frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-2\beta c}) + 2\lambda e^{-2\beta c} = -2\tilde{\alpha}d^2. \tag{12.11}$$

在(12.9) 两边对 s 求三阶导数后令 $s = 0$ 得

$$2\beta e^{-2\beta c}\lambda^2 + 3\alpha\lambda e^{-2\beta c} - \frac{\alpha^2}{\beta}(1 - e^{-2\beta c}) = -2\tilde{\alpha}^2d^2. \tag{12.12}$$

由 (12.10) 知 $c>0$. 下面用反证法证明：对任意 $c>0$ 有 $\lambda=0$. 设不然，如 $\lambda>0$. 在 (12.10) 两边令 $s\to+\infty$取极限得

$$\frac{1}{4\alpha\beta}=\frac{d^2}{2\tilde{\alpha}}. \tag{12.13}$$

由 (12.10) (12.11) (12.13) 消去 $\tilde{\alpha}$和 d 得 λ 的解 λ_1，将其代入 (12.10) — (12.12) 组成的方程组知，λ 不满足此方程组，矛盾. 所以 $\lambda=0$.

充分性　对 $s\geqslant 0$，

$$X(s,c) = e^{-\alpha s-\beta c}[X_0 + \sigma J(s,c)]. \tag{12.14}$$

$\{J(s,t)\}$ 是两参数鞅，从而 $\{J(s,c)\}$ 为 $(\mathscr{F}_{s,c}, s \geqslant 0)$ 适应 1 鞅. 对 $s_2 > s_1$,

$$
\begin{aligned}
& E\{[J(s_2,c)]^2 - [J(s_1,c)]^2 | \mathscr{F}_{s_1,c}\} \\
= & E[J(s_2,c) - J(s_1,c)]^2 - J(s_1,c)E[J(s_2,c) - J(s_1,c)] \\
= & E\left[\int_{s_1}^{s_2}\int_0^c e^{\alpha a+\beta b}dW(a,b)\right]^2 = \int_{s_1}^{s_2}\int_0^c e^{2\alpha a+2\beta b}dadb \\
= & \frac{e^{2\beta c}-1}{4\alpha\beta}[e^{2\alpha s_2} - e^{2\alpha s_1}].
\end{aligned} \tag{12.15}
$$

故与 $\{J(s,c), s \geqslant 0\}$ 相联系的增过程 $<J_c>$ 为

$$
\begin{aligned}
<J_c>(s) &= \frac{1}{4\alpha\beta}(e^{2\beta c} - 1)(e^{2\alpha s} - 1) \\
&= \frac{1}{2\beta}(e^{2\beta c} - 1)\int_0^s e^{2\alpha a}da.
\end{aligned} \tag{12.16}
$$

由鞅表现定理知存在 $(\mathscr{F}_{s,c}, s \geqslant 0)$ 适应的标准 Brown 运动 $\widetilde{W}$ 使

$$
J(s,c) = \int_0^s \sqrt{(e^{2\beta c} - 1)/2\beta}\, e^{2\alpha a}d\widetilde{W}(a).
$$

由于 X_0 与 $(\mathscr{F}_{s,0}, s \geqslant 0)$ 独立，从而与 $\widetilde{W}$ 独立，并注意到(12.14)，有

$$
\begin{aligned}
X(s,c) &= e^{-\alpha s}\left[e^{-\beta c}X_0 + \sigma\sqrt{(1-e^{-2\beta c})/2\beta}\int_0^s e^{\alpha a}d\widetilde{W}(a)\right] \\
&= e^{-\alpha s}\left[X(0,c) + \sigma\sqrt{(1-e^{-2\beta c})/2\beta}\int_0^s e^{\alpha a}d\widetilde{W}(a)\right].
\end{aligned}
$$

由此知，$X_c = \{X(s,c), s \geqslant 0\}$ 是 OUP_2，其相应的常数参数分别为

$$
\tilde{\alpha} = \alpha,\ \tilde{X}_0 = X(0,c),\ \tilde{\sigma} = \sigma\sqrt{(1-e^{-2\beta c})/2\beta}.
$$

充分性得证. ∎

13.13 定理 导出过程 Y 是单参数马氏过程，它有转移密度函数：

$$
f(u,x;s,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}H}exp\left\{-\frac{(y - xe^{-(\alpha+\beta\lambda)(s-u)})^2}{2H^2}\right\},
$$

$$
u \leqslant s, x, y \in R^1 \tag{13.1}
$$

它是正态分布 $N(xe^{-(\alpha+\beta\lambda)(s-u)}, H^2)$ 的密度函数，其中

$$
H^2 = \frac{\sigma^2}{4\alpha\beta}[(1 - e^{2\beta\lambda(s-u)})(1 - e^{-2\alpha s})
$$

$$+e^{-2\beta\lambda(s-u)}(1-e^{-2\beta(\lambda u+c)})(1-e^{-2\alpha(s-u)})\Big].$$

(13.2)

证 直接利用定理 13.10 而得. ∎

13.14 定理 设 $EX_0^2<\infty$,则 Y 为弱平稳过程的充要条件是:

$$\lambda=0,\ c=\frac{\ln(\sigma^2+4\alpha\beta EX_0^2)-2\ln\sigma}{2\beta}. \tag{14.1}$$

此时相关函数为

$$B(\tau)=\frac{\sigma^2 EX_0^2}{\sigma^2+4\alpha\beta EX_0^2}e^{-\alpha|\tau|}. \tag{14.2}$$

谱密度为:

$$f(\lambda)=\frac{\alpha\sigma^2 EX_0^2}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)(\sigma^2+4\alpha\beta EX_0^2)}. \tag{14.3}$$

证 对任意 s,$s+\tau\geqslant 0$,不妨设 $\tau\geqslant 0$,则

$$B(\tau,s)=EX(s+\tau,\lambda(s+c)+c)X(s,\lambda s+c)$$

$$=e^{-(\alpha-\beta\lambda)(2s+\tau)-2\beta c}\Big[EX_0^2+\frac{\sigma^2}{4\alpha\beta}(e^{2\alpha s}-1)(e^{2\beta(\lambda s+c)}-1)\Big].$$

必要性证明:因 Y 是弱平稳过程,则相关函数 $B(\tau,s)$ 不依赖于 s,故对任意 $s\geqslant 0$,有 $\frac{\partial B(\tau,s)}{\partial s}=0$,并分别令 $s=0$,$s=1$ 得到两方程,解此方程组得 $\lambda=0$. 将 $\lambda=0$ 代入(14.3)得(14.1)第 2 式.

充分性证明 设 (14.1) 成立. 则

$$EX^2(s,c)$$

$$=e^{-2\alpha s-2\beta c}\Big[EX_0^2+\frac{\sigma^2}{4\alpha\beta}(e^{2\alpha s}-1)(e^{2\beta c}-1)\Big]<\infty.$$

$$B(\tau,s)=\frac{\sigma^2 EX_0^2}{4\alpha\beta EX_0^2+\sigma^2}e^{-\alpha\tau}.$$

因 $B(\tau,s)$ 不依赖于 s,故 Y 是弱平稳过程,$B(\tau,s)$ 为 Y 的相关函数. 由相关函数的性质有 $B(-\tau,s)=B(\tau,s)$,故

$$B(\tau,s)=\frac{\sigma^2 EX_0^2}{4\alpha\beta EX_0^2+\sigma^2}e^{-\alpha|\tau|}.$$

谱密度为

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda\tau}B(\tau)d\tau=\frac{\alpha\sigma^2 EX_0^2}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)(4\alpha\beta EX_0^2+\sigma^2)}.$$ ∎

13.15 系 设 X_0 是正态随机变量，(14.1) 成立. 则 Y 是平稳过程.

§13.5 奇点蔓延

我们将研究 OUP_2 的截口的重对数律，并指出关于重对数律的奇点可以沿着水平方向和垂直方向蔓延. 记

$$K(s,t)=\limsup_{h\to 0}\frac{|J(s+h,t)-J(s,t)|}{\sqrt{h\ln\ln(1/h)}},$$

$$(s,t)\geqslant(0,0). \tag{15.1}$$

13.16 引理 固定 $s\geqslant 0$. 则对每个 $t\geqslant 0$，有

$$K(s,t)=\sqrt{(e^{2\beta t}-1)/2\beta}\, e^{\alpha s},\quad a.s. \tag{16.1}$$

证 固定 $t\geqslant 0$. 由定理 13.12 的证明知，$J_t=\{J(s,t),s\geqslant 0\}$ 是 $(\mathscr{F}_{s,t},s\geqslant 0)$ 鞅，相联系的增过程 $<J_t>$ 由(12.16)(取 $c=t$)给出. 由鞅表现定理知，存在 $(\mathscr{F}_{s,t},s\geqslant 0)$ 适应的标准 Brown 运动 $\widehat{W}_1(s)$，使

$$J_{s,t}=\widehat{W}(<J_t>(s)). \tag{16.2}$$

其中 $J_{s,t}=\mathscr{F}_{\tau_s,t}$，而 $\tau_s=in_f\{u:<J_t>(u)>s\}$. 记

$$\tau(h)\equiv<J_t>(s+h)-<J_t>(s)$$

$$=\frac{1}{2\beta}(e^{2\beta t}-1)\int_s^{s+h}e^{2\alpha a}da. \tag{16.3}$$

由单参数 Brown 运动的重对数律

$$\limsup_{h\to 0}\frac{|\widehat{W}_1(<J_t>(s+h))-\widehat{W}_1(<J_t>(s))|}{\sqrt{\tau(h)\ln\ln(1/\tau(h))}}$$

$$=1,\ a.s. \tag{16.4}$$

另一方面，由(16.3) 及 L'Hospitale 法则

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\tau(h)\ln\ln(1/\tau(h))}}{\sqrt{h\ln\ln(1/h)}}=\sqrt{\tau'(0)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2\beta}(e^{2\beta t}-1)e^{\alpha s}}.$$

于是

$$K(s,t) = \limsup_{h\to 0} \frac{|\widetilde{W}_1(\langle J_t\rangle(s+h) - \widetilde{W}_1(\langle J_t\rangle(s))|}{\sqrt{\tau(h)\ln\ln(1/\tau(h))}} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{\tau(h)\ln\ln(1/\tau(h))}}{\sqrt{h\ln\ln(1/h)}} = \sqrt{(e^{2\beta t}-1)/2\beta}\, e^{\alpha s}, \ a.s.$$

即(16.1). ∎

13.17 引理 设 $H=(H_1, H_2)$ 为弱停点，且 $a.s.$ 有限. 则对任意 $\delta=(\delta_1, \delta_2)\in R_+^2$，有

$$\int_{H_1}^{H_1+\delta_1}\int_{H_2}^{H_2+\delta_2} e^{\alpha a+\beta b} dW(a,b) = \int_0^{\delta_1}\int_0^{\delta_2} e^{\alpha(a+H_1)+\beta(b+H_2)} dW^H(a,b). \tag{17.1}$$

其中 $W^H(z)=W(H,H+z]$.

证 由定理 12.18 知，W^H 是与 $\mathscr{F}_H^*$ 独立的 Brown 单. 易见，对 $A\in\mathscr{B}(R_+^2)$，$W^H(A)=W(H+A)$，其中 $H+A=\{H+z: z\in A\}$. 为证(17.1)，先证：对有界 $A\in\mathscr{B}(R_+^2)$，有

$$\int_{[H,H+\delta]} I_A(z)dW(z) = \int_{[0,\delta]} I_A(H+z)dW^H(z). \tag{17.2}$$

实际上，(17.2)右方等于 $W^H((A-H)\cap[0,\delta])=W(A\cap[H,H+\delta])=$(17.2)的左方.

对任意正整数 n，记 $R_{(n,n)}$ 的示性函数为 I_n，它是示性函数 I_A（有界 $A\in\mathscr{B}(R_+^2)$）的线性组合的均方极限. 由 (17.2) 及随机积分的定义

$$\int_{[H,H+\delta]} I_n(a,b)e^{\alpha a+\beta b}dW(a,b) = \int_{[0,\delta]} I_n(H_1+a, H_2+b)e^{\alpha(a+H_1)+\beta(b+H_2)}dW^H(a,b).$$

令 $n\to\infty$，仍由随机积分的定义得 (17.1). ∎

13.18 引理 设 $H=(H_1, H_2)$ 是有限值弱停点，则对固定的 $(s, \delta)\in R_+^2$，有

$$\limsup_{h\downarrow 0}\frac{\left|\int_{H_1}^{H_1+s+h}\int_{H_2}^{H_2+\delta}e^{\alpha a+\beta b}dW(a,b)-\int_{H_1}^{H_1+s}\int_{H_2}^{H_2+\delta}e^{\alpha a+\beta b}dW(a,b)\right|}{\sqrt{h\ln\ln(1/h)}}$$

$$=\sqrt{(e^{2\beta\delta}-1)/2\beta}\quad e^{\alpha(s+H_1)+\beta H_2},\ a.s. \tag{18.1}$$

证 由(17.1),(18.1)左方的分子等于

$$\Big|\int_0^{s+h}\int_0^{\delta}e^{\alpha(a+H_1)+\beta(b+H_2)}dW^H(a,b)$$

$$-\int_0^s\int_0^{\delta}e^{\alpha(a+H_1)+\beta(b+H_2)}dW^H(a,b)\Big|$$

$$=e^{\alpha H_1+\beta H_2}\left|\int_0^{s+h}\int_0^{\delta}e^{\alpha a+\beta b}dW^H(a,b)-\int_0^s\int_0^{\delta}e^{\alpha a+\beta b}dW^H(a,b)\right|.$$

将 W^H 视为引理 13.16 中的 W，得 (18.1). ∎

下面的引理是引理 13.16 的加强.

13.19 引理 固定 $s\geqslant 0$. 以概率 1，

$$K(s,t)=\sqrt{(e^{2\beta t}-1)/2\beta}\,e^{\alpha s},\text{对一切 } t\geqslant 0. \tag{19.1}$$

证 由引理 13.16 及 Fubini 定理可得，以概率 1，(19.1) 对几乎一切 $t\geqslant 0$ 成立，往证对一切 $t\geqslant 0$ 也成立. 简记 $\varphi(s,t)=\sqrt{(e^{2\beta t}-1)/2\beta}\,e^{\alpha s}$.

如设不然，则有

$P\{\omega$:存在 $t\geqslant 0$ 使 $K(s,t)\neq\varphi(s,t)\}>0$.

注意到

$$K(s,t)=\lim_{n\to\infty}\sup_{0<h<\frac{1}{n}}\frac{|J(s+h,t)-J(s,t)|}{\sqrt{h\ln\ln(1/h)}}.$$

对固定的 s, n, h，上式中分式是 $\{\mathscr{F}_t^2,\ t\geqslant 0\}$ 适应过程，且关于 t 是连续的过程，从而是可选过程，于是 $K(s,t)$ 也是 $\{\mathscr{F}_t^2, t\geqslant 0\}$ 适应的可选过程. 由 Meyer 关于可选过程的截口定理，对可选集

$A\equiv\{(t,\omega):K(s,t)\neq\varphi(s,t)\}$

存在 $\{\mathscr{F}_t^2\}$ 停时 T_2，使 T_2 的图 $[\![T_2]\!]\subset A$, $P(T_2<\infty)>0$，且 $\omega\in B\equiv\{T_2<\infty\}$ 时

$$K(s,T_2(\omega))\neq\varphi(s,T_2(\omega)) \tag{19.2}$$

另一方面，对 $\delta>0$，有

$$
\begin{aligned}
&|J(s+h,T_2) \quad J(s,T_2)| - |J(s+h,T_2+\delta) \\
&\quad - J(s+h,T_2) - J(s,T_2+\delta) + J(s,T_2)| \\
&\leqslant |J(s+h,T_2+\delta) - J(s,T_2+\delta)| \\
&\leqslant |J(s+h,T_2) - J(s,T_2)| + |J(s+h,T_2+\delta) \\
&\quad - J(s+h,T_2) - J(s,T_2+\delta) + J(s,T_2)| \quad (19.3)
\end{aligned}
$$

而(19.3)右方第二项等于

$$
\left| \int_0^{s+h}\int_{T_2}^{T_2+\delta} e^{\alpha a+\beta b} dW(a,b) - \int_0^s\int_{T_2}^{T_2+\delta} e^{\alpha a+\beta b} dW(a,b) \right|. \quad (19.4)
$$

由于 $T=(0,T_2)$ 为弱停点,其在 B 上是有限值的. 故在(19.3)的左、中、右各除以 $\sqrt{h\ln\ln(1/h)}$,然后再求 $\limsup_{h\downarrow 0}$,利用(19.4)及引理 13.18,有

$$
\begin{aligned}
&K(s,T_2(\omega)) - \sqrt{(e^{2\beta\delta}-1)/2\beta} \quad e^{\alpha s+\beta T_2(\omega)} \\
&\leqslant K(s,T_2(\omega)+\delta) \\
&\leqslant K(s,T_2(\omega)) + \sqrt{(e^{2\beta\delta}-1)/2\beta} \quad e^{\alpha s+\beta T_2(\omega)}, \ a.s.
\end{aligned}
$$

由于 $\lim_{\delta\to 0} \sqrt{(e^{2\beta\delta}-1)/2\beta}e^{\alpha s+\beta T_2(\omega)}=0$,故对 B 中几乎一切 ω,对充分小的 $\delta>0$ 都有

$$
K(s,T_2(\omega)+\delta) \neq \varphi(s,T_2(\omega)+\delta).
$$

即对 B 中几乎一切 ω,都有 Lebesgue 测度为正的 t - 集合,使

$$
K(s,t,\omega) \neq \varphi(s,t).
$$

由于 $P(B)>0$,与结论"以概率 1,(19.1) 对几乎一切 $t\geqslant 0$ 成立"相矛盾. ∎

13.20 定理 对固定的 $s\geqslant 0$,以概率 1,

$$
\limsup_{h\downarrow 0} \frac{|X(s+h,t)-X(s,t)|}{\sqrt{h\ln\ln(1/h)}} = \sigma\sqrt{(1-e^{-2\beta t})/2\beta},
$$

一切 $t\geqslant 0$. (20.1)

证 由(2.2),

$$
\begin{aligned}
X(s+h,t)-X(s,t) = e^{-\alpha s-\beta t}\{&\sigma[J(s+h,t)-J(s,t)] \\
&+ (e^{-\alpha h} - 1)[X_0+\sigma J(s+h,t)]\}.
\end{aligned}
$$

于是 $e^{-\alpha s-\beta t}\{\sigma|J(s+h,t)$

$$-J(s,t)|-|e^{-\alpha h}-1|\cdot|X_0+\sigma J(s+h,t)|\}$$

$$\leqslant|x(s+h,t)-X(s,t)|$$

$$\leqslant e^{-\alpha s-\beta t}\{\sigma|J(s+h,t)-J(s,t)|+|e^{-\alpha h}-1|$$

$$\cdot|X_0+\sigma J(s+h,t)|\} \tag{20.2}$$

因 $J(s+h,t)$ 关于 h 连续，故

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{|e^{-\alpha h}-1|\cdot|X_0+\sigma J(s+h,t)|}{\sqrt{h\ln\ln(1/h)}}=0. \tag{20.3}$$

在(20.2)的左、中、右中分别除以 $\sqrt{h\ln\ln(1/h)}$，然后求 $\limsup\limits_{h\downarrow 0}$，由引理 13.19 及 (20.3) 便得 (20.1). ∎

13.21′ 注 定理 13.20 说明，对于 OUP_2 的每个截口过程，成立重对数律，而且在 $s\geqslant 0$ 固定时，以概率 1，对一切 $t\geqslant 0$ 的 t 截口上，在 s 点成立重对数律. 回忆单参数 Brown 运动 $\{\widetilde{W}(a),a\geqslant 0\}$，使

$$\limsup_{h\downarrow 0}\frac{|\widetilde{W}(s+h)-\widetilde{W}(s)|}{\sqrt{h\ln\ln(1/h)}}=+\infty$$

的点 s 的全体构成的集合，是实轴上不可数的稠子集，具有 Hausdorff 维数 1，而且存在一个 $\sigma\{\widetilde{W}(s),s\geqslant 0\}$ 可测的随机变量 $S(\omega)$，使对几乎一切 ω，有

$$\limsup_{h\downarrow 0}\frac{|\widetilde{W}(S(\omega)+h)-\widetilde{W}(S(\omega))|}{\sqrt{h\ln\ln(1/h)}}=+\infty. \tag{20.4}$$

现考虑 $OUP_2\ X$. 固定 $t>0$，称 s 为 X 的奇点，如果

$$H(s,t)\equiv\limsup_{h\downarrow 0}\frac{|X(s+h,t)-X(s,t)|}{\sqrt{h\ln\ln(1/h)}}$$

$$=+\infty,\ a.s. \tag{20.5}$$

注意到 (16.2)，$J(s,t)$ 的重对数律是化为单参数 Brown 运动进行的，又 $H(s,t)$ 的计算是基于 $J(s,t)$ 进行的，因此，易知，存在 $\mathscr{F}_t^2$ 可测的随机变数 $S(\omega)$，使

$$H(S(\omega),t,\omega)=\infty,\ a.s.$$

即 $S(\omega)$ 是 OUP_2 的奇点. 下面的定理说明 X 的奇点，可沿垂直方向蔓延，同时，依对称性，考虑水平方向 X 的相对偶的奇点也可

以沿着水平方向蔓延.

13.21 定理 设 $t_0>0$，S 是 $\mathscr{F}^2_{t_0}$ 可测的随机变数，则对几乎一切 ω，$H(S(\omega),t,\omega)=+\infty$ 对一切 $t>t_0$ 成立的充要条件是：$H(S(\omega),t_0,\omega)=+\infty, a.s.$.

证 由(20.2)，只要证明：对 $t>t_0$，$K(S(\omega),t,\omega)=\infty, a.s.$ 的充要条件是 $K(S(\omega),t_0,\omega)=\infty, a.s.$ 即可.

令 $T(\omega)=(S(\omega),t_0)$，易知 T 是弱停点. 记

$$\delta=t-t_0>0, \triangle=(0,\delta), H=(h,0).$$

于是

$$|J(T+H)-J(T)|-|J(T+H+\triangle)-J(T+H)-J(T+\triangle)+J(T)|$$
$$\leqslant |J(S+h,t)-J(S,t)|$$
$$\leqslant |J(T+H)-J(T)|+|J(T+H+\triangle)-J(T+H)-J(T+\triangle)+J(T)|. \tag{21.1}$$

由于(2.2)，

$$J(T+H+\triangle)-J(T+H)-J(T+\triangle)+J(T)$$
$$=J(T,T+H+\triangle]=J(T,T+H+\triangle]-J(T,T+\triangle].$$

由引理 13.18，便得

$$\limsup_{h\downarrow 0}\frac{|J(T(\omega),T(\omega)+H+\triangle]|}{\sqrt{h\ln\ln(1/h)}}$$
$$=\sqrt{(e^{2\beta\delta}-1)/2\beta}\,e^{\alpha S(\omega)+\beta t_0}, \ a.s. \tag{21.2}$$

在 (21.1) 的左、中、右分别除以 $\sqrt{h\ln\ln(1/h)}$，并求 $\limsup\limits_{h\downarrow 0}$，利用 (21.2)，得

$$K(S(\omega),t_0,\omega)-\sqrt{(e^{2\beta\delta}-1)/2\beta}\,e^{\alpha S(\omega)+\beta t_0}$$
$$\leqslant K(S(\omega),t,\omega)$$
$$\leqslant K(S(\omega),t_0,\omega)$$
$$+\sqrt{(e^{2\beta\delta}-1)/2\beta}\,e^{\alpha S(\omega)+\beta t_0}, \ a.s. \qquad ∎$$

§ 13.6 转移概率及预测

本节中对某些 $F\subset R^2_+$，求出条件概率 $P\{X(z)\leqslant a|\mathscr{F}(F)\}$，

它们以三点转移函数为特例. 此外，还将求出最佳预测及误差.

定义 5.39 中的简单折线，可以从另一个角度来刻划. 下面定理是显而易见的. 内点、折点的定义见定义 11.31.

13.22 定理 设 B 是 R_+^2 中的连续曲线. 如果任意 $z\in B$，z 必为 B 的内点或折点，且对任意 $z\in R_-^2$，B 在 R_z 中的折点数目有限，则 B 是简单折线. 反之亦正确.

将定理 13.22 与定义 11.32 比较. 正规阶梯折线是简单折线. 反之不真，因为简单折线可能与轴 λ_0 相交. 设 B 是简单折线. 区域 $[\lambda_0, B]$，即 λ_0 与 B 围成的区域，称为梯形域.

设 B 是简单折线，$K=[\lambda_0, B]$ 是梯形域，$z=(s, t)\notin K$. 自 z 引两条直线平行于两坐标轴，交 K 的边界 ∂K 于 z_0，z_{n+1} 两点，直线 $\overline{zz_0}$ 平行 s 轴，$\overline{zz_{n+1}}$ 平行 t 轴. 此两点间的折点顺次记为 z_1，…，z_n. 设 $z_i=(u_i, v_i)$，$0\leqslant i\leqslant n+1$. 显然，

$$\left.\begin{aligned} u_0 = u_1 < u_2 = u_3 < \cdots < u_{n-1} = u_n < u_{n+1} = s, \\ t = v_0 > v_1 = v_2 > v_3 = v_4 > \cdots > v_n = v_{n-1}. \end{aligned}\right\} \quad (22.1)$$

13.23 定理 设 $z\notin K$，则对任意实数 a，

(i) $P\{X(z)\leqslant a\,|\,\mathscr{F}(K)\} = P\{X(z)\leqslant a\,|\,X(z_i), i=0,1,\cdots, n+1\}$. (23.1)

其中 $\mathscr{F}(K)=\bigvee\limits_{z\in K}\mathscr{F}_z$.

(ii) 在条件 $X(z_i)=x_i$，$0\leqslant i\leqslant n+1$，之下，$X(z)$ 有正态分布 $N(m,\Sigma^2)$，其中

$$m = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i e^{-\alpha(s-u_i)-\beta(t-v_i)}x_i, \quad (23.2)$$

$$\Sigma^2 = \sigma^2 e^{-2\alpha s-2\beta t}M(R_z - K). \quad (23.3)$$

其中 $M(Q) = \iint\limits_Q e^{2\alpha a+2\beta b}dW(a,b)$.

证 自折点 $z_1,z_3,\cdots,z_{n-2}$，向直线 $\overline{zz_{n+1}}$ 作垂线，交点记为 $h_i=(s,v_i)$，$i=1,3,5,\cdots,n-2$. 于是得 $\frac{n+1}{2}$ 个矩形 $H_1=(z_1,z]$，$H_3=(z_3,h_1]$，…，$H_n=(z_n,h_{n-2}]$，如图 12 所示.

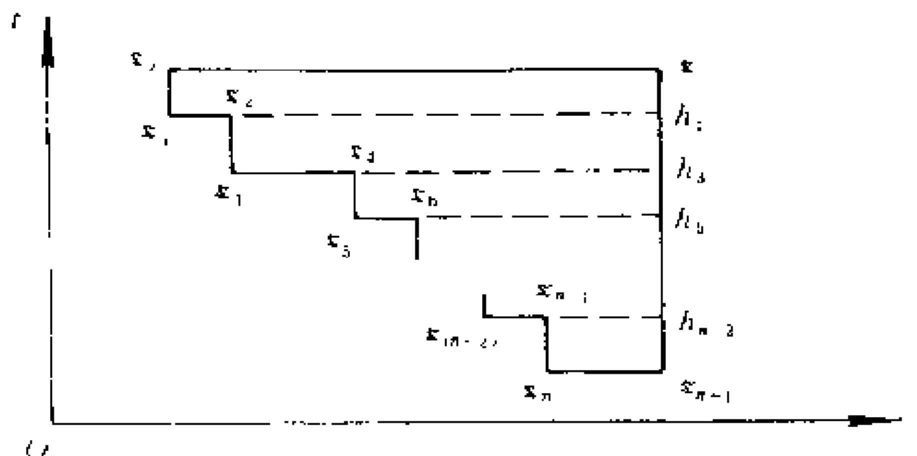


图 12

对这些矩形分别运用（6.1），并注意（22.1），得

$$\begin{aligned}X(z) &= e^{-\alpha(s-u_0)}X(z_0) + e^{-\beta(t-v_1)}X(h_1) \\ &\quad - e^{-\alpha(s-u_1)-\beta(t-v_1)}X(z_1) \\ &\quad + \sigma e^{-\alpha s-\beta t}J(H_1), \\ &\quad \cdots\cdots\end{aligned}$$

$$X(h_{n-2}) = e^{-\alpha(s-u_{n-1})}X(z_{n-1}) + e^{-\beta(v_{n-2}-v_n)}X(z_{n+1})$$
$$- e^{-\alpha(s-u_n)-\beta(v_{n-2}-v_n)}X(z_n) + \sigma e^{-\alpha s-\beta v_{n-2}}J(H_n).$$

由此方程组消去 $X(h_i), i = 1,3,5,\cdots,n-2$，并注意 $\sum_i J(H_i) = J(R_z - K)$，即得

$$X(z) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i e^{-\alpha(s-u_i)-\beta(t-v_i)}X(z_i)$$
$$+ \sigma e^{-\alpha s-\beta t}J(R_z - K) = \Sigma_1 + \Sigma_2. \qquad (23.4)$$

其中 Σ_1 为 $\sigma\{X(z_i), 0\leqslant i\leqslant n+1\}\subset\mathscr{F}(K)$ 可测，而 Σ_2 与 $\mathscr{F}(K)$ 独立，故对实数 ξ，

$$E\{e^{i\xi X(z)}|\mathscr{F}(K)\} = e^{i\xi\Sigma_1}E(e^{i\xi\Sigma_2})$$
$$= E\{e^{i\xi X(z)}|X(z_i), 0\leqslant i\leqslant n+1\}. \qquad (23.5)$$

取对应的条件分布后，得（i）.

由于 $J(R_z - K)$ 有 $N(0, M(R_z - K))$ 分布，故 Σ_2 有 $N(0, \Sigma^2)$ 分布，当 $X(z_i) = x_i (0\leqslant i\leqslant n+1)$ 固定时，Σ_1 等于常数 m，故由（23.5）的第二等式得（ii）. ∎

13.24 注 如 $n=1$，则 (ii) 中条件概率化为定理 13.8 中的二点转移函数.

下面设 X_0 有 $N(l,d^2)$ 分布，从而 OUP_2 即 X，是正态过程.

今欲求 R_+^2 中任两点 $z_1=(u,v)$，$z_2=(s,t)$ 间的转移概率 $P\{X(s,t)\leqslant a|X(u,v)=x\}$. 当 $z_1\leqslant z_2$ 时，此概率已在定理 13.10 中求出. 对一般的 z_1，z_2，则需要下列熟知的结果：

13.25 定理 设 (ξ_1,ξ_2) 服从二元正态分布，ξ_i 有 $N(m_i,\sigma_i^2)$ 分布，$i=1,2$，相关系数为 ρ. 则当 $\xi_1=x$ 时，ξ_2 有正态分布

$$N\left(m_2+\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(x-m_1),\sigma_2^2(1-\rho^2)\right).\tag{25.1}$$

现在应用定理13.25于 $\xi_1=X(u,v)$，$\xi_2=X(s,t)$. 由(2.1)有

$$m_1=EX(u,v)=e^{-\alpha u-\beta v}l,\tag{25.2}$$

$$\begin{aligned}\sigma_1^2&=DX(u,v)\\&=e^{-2\alpha u-2\beta v}\left[d^2+\frac{\sigma^2}{4\alpha\beta}(e^{2\alpha u}-1)(e^{2\beta v}-1)\right].\end{aligned}\tag{25.3}$$

用 (s,t) 代替 (u,v) 得 m_2,σ_2^2. 为求 ρ，只要求出

$$\begin{aligned}&EX(u,v)X(s,t)\\&=e^{-\alpha(s+u)-\beta(t+v)}\{EX_0^2+\sigma^2E[J(R_{uv})\cdot J(R_{st})]\}\\&=e^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}\{EX_0^2\\&\quad+\frac{\sigma^2}{4\alpha\beta}(e^{2\alpha(u\wedge s)}-1)(e^{2\beta(v\wedge t)}-1)\}.\end{aligned}\tag{25.4}$$

从而可以对一般的 z_1,z_2 求出转移概率. 特别地，当 $z_1\leqslant z_2$ 时，与定理 13.10 相比较，可得

$$\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}=e^{-\alpha(s-u)-\beta(t-v)}.$$

今求闭矩形 B 的转移概率，其折点为 $z_1=(u,v)$，$z_2=(u,t)$，$z_3=(s,v)$，$z_4=(s,t)$，又 $z_1<z_4$. 设 $z=(g,h)\notin B$，以 $z_0=(u_0,v_0)$ 表 ∂B 上与 z 最近之点，即

$$\rho(z,z_0)=\inf_{y\in\partial B}\rho(z,y).\tag{25.5}$$

如 $z>z_4$，则 $z_0=z_4$；如 $z<z_1$，则 $z_0=z_1$.

13.26 定理 设 $z=(g,h)\notin B$，$z>z_1$ 或 $z<z_1$. 则

(i) $P\{X(z)\leqslant a|\mathscr{F}(B)\}=P\{X(z)\leqslant a|X(z_0)\}$. (26.1)

(ii) 当 $X(z_0)=x$ 时，$X(z)$ 有正态分布 $N(b,f^2)$，其中，当 $z>z_1$ 时，

$$b=e^{-\alpha(g-u_0)-\beta(h-v_0)}x, \tag{26.2}$$

$$f^2=\sigma^2e^{-2\alpha g-2\beta h}M(R_z-R_{z_0}). \tag{26.3}$$

当 $z<z_1$ 时，则 b，f^2 可由定理 13.25 求出，此时

$$EX(z)X(z_0)$$
$$=e^{-\alpha(g+u)-\beta(h+v)}\left\{EX_0^2+\frac{\sigma^2}{4\alpha\beta}(e^{2\alpha g}-1)(e^{2\beta h}-1)\right\}. \tag{26.4}$$

证 设 $z\in B$. 当 $z>z_1$ 时，由 (5.1)，

$$X(z)=e^{-\alpha(g-u_0)-\beta(h-v_0)}X(z_0)+\sigma e^{-\alpha g-\beta h}J(R_z-R_{z_0})$$
$$=\Sigma_1+\Sigma_2. \tag{26.5}$$

仿定理 13.23 的证明得 (26.1) — (26.3).

当 $z<z_1$ 时，此时 $z_0=z_1$. 由于 $\mathscr{F}_{z_1}$，$\mathscr{F}(R_{z_1}^{*c})$ 关于 $\sigma\{X(z_1)\}$ 条件独立，从而 $\mathscr{F}_{z_1}$，$\mathscr{F}(B)$ 也关于 $\sigma\{X(z_1)\}$ 条件独立. 由于 $\sigma\{X(z_1)\}\subset\mathscr{F}(B)$，$(X(z)\leqslant a)\in\mathscr{F}_{z_1}$，故

$$P\{X(z)\leqslant a|\mathscr{F}(B)\}=P\{X(z)\leqslant a|X(z_1)\}$$
$$=P\{X(z)\leqslant a|X(z_0)\}. \tag{26.6}$$

(26.4) 由 (25.5) 得到. ■

今讨论预测问题. 设 $A\subset R_+^2$，$z\in A$. 令

$$\mathscr{L}^2(A)=\{h;h\text{ 为 }\mathscr{F}(A)\text{ 可测},E|h|^2<\infty\}. \tag{26.7}$$

欲求 $l(z,A)\in\mathscr{L}^2(A)$，使

$$E|X(z)-l(z,A)|^2=\inf_{h\in\mathscr{L}^2(A)}E|X(z)-h|^2. \tag{26.8}$$

称 $l(z,A)$ 为 $X(z)$ 关于 $\{X(y),y\in A\}$ 的预测量. 预测误差定义为

$$\epsilon(l,A)=E|X(z)-l(z,A)|^2. \tag{26.9}$$

由于 X 是正态过程，$l(z,A)$ 重合于线性预测.

下面的引理证明简单，从略.

13.27 引理 设 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_k)$，$\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$ 为独立的随机向量，f，g 为两个 Borel 函数，

$$E|f(\xi)| < \infty, \quad E|g(\eta)| < \infty. \tag{27.1}$$

如 $\zeta = f(\xi) + g(\eta)$，则

$$E(\zeta|\xi) = f(\xi) + Eg(\eta). \tag{27.2}$$

如 $E|f(\xi)g(\eta)| < \infty, \zeta = f(\xi)g(\eta)$，则

$$E(\zeta|\xi) = f(\xi)Eg(\eta). \tag{27.3}$$

现分别考虑定理 13.23 中的 K 和定理 13.26 中的 B，并用那里的记号.

13.28 定理 (i) 设 $z = (s, t) \notin K$，则

$$l(z,K) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i e^{-\alpha(s-u_i)-\beta(t-v_i)}X(z_i). \tag{28.1}$$

$$\epsilon(z,K) = \Sigma^2. \tag{28.2}$$

(ii) 设 $z = (g,h) \notin B, z > z_1$. 则

$$l(z,B) = e^{-\alpha(g-u_0)-\beta(h-v_0)}X(z_0). \tag{28.3}$$

$$\epsilon(z,B) = f^2. \tag{28.4}$$

证 周知 $l(z,A) = E\{X(z)|\mathscr{F}(A)\}, z \notin A$. 由(23.1)有

$$\begin{aligned} l(z,K) &= E\{X(z)|\mathscr{F}(K)\} \\ &= E\{X(z)|X(z_i), 0 \leqslant i \leqslant n+1\}. \end{aligned}$$

对(23.4)应用引理 13.27，因$(X(z_0),\cdots,X(z_{n+1}))$与 $J(R_z - K)$ 独立，又 $EJ(R_z - K) = 0$，故由(23.4)及(27.1)得(28.1). 再由(23.4)有

$$\begin{aligned} \epsilon(z,K) &= E|X(z) - l(z,K)|^2 = \sigma^2 e^{-2\alpha s-2\beta t}E|J(R_z - K)|^2 \\ &= \Sigma^2. \end{aligned}$$

类似地，由(26.5)可证(ii). ∎

13.29 注 转移概率 $P\{X(z) \leqslant a|\mathscr{F}(A)\}$ 不仅依赖于 A，而且依赖于 z 的位置. 在定理 13.26 中，我们已知，在那里的条件下，它只是一个变量 $X(z_0)$ 的函数. 但如 $z \notin B$，既非 $z > z_1$ 又非 $z < z_1$，它可能较复杂. 直观上可以想象，当 A 是有限多个矩形的和时，情况当更复杂. 但对某些 z，我们的方法仍然有效.

第5篇

马尔可夫型两参数随机微分方程

14 作为随机微分方程解的两参数马氏过程

§14.1 马氏型两参数随机微分方程

14.1 马氏型方程 1981年Yeh首先证明了两参数随机微分方程

$$\left.\begin{aligned} &dX(z)=\alpha(z,X)dB(z)+\beta(z,X)dz,\ z\in R_{+}^{2},\\ &X|_{\lambda_0}=Y. \end{aligned}\right\}(1.1)$$

的解$X=\{X(z),z\in R_{+}^{2}\}$的存在和唯一性，其中$B$是Brown单.本章基于Yeh定理，证明马氏型两参数随机微分方程

$$\left.\begin{aligned} &dX(z)=\widetilde{\alpha}(z,X(z))dB(z)+\widetilde{\beta}(z,X(z))dz,z\in R_{+}^{2},\\ &X|_{\lambda_0}=Y. \end{aligned}\right\}$$

(1.2)

的解的存在且唯一，然后讨论解的各种两参数马氏性，并指出，此解是规则宽过去马氏过程.

§14.2 记号和Yeh定理

设给定完备概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$，给定满足条件(F_1)—(F_4)的$\mathscr{F}$的子σ域族$\mathscr{A}=\{\mathscr{F}_z,z\in R_{+}^{2}\}$.假定存在$\mathscr{A}$适应的Brown单$B=\{B(z),z\in R_{+}^{2}\}$.对于两参数过程$\Phi_1$和$\Phi_2$，当它们互为修正时，将视$\Phi_1$和$\Phi_2$为同一过程.

14.2 记号 $F_p(\mathscr{A})(p>0)$ 设$p>0$.记号$F_p(\mathscr{A})$表示

满足下面条件的两参数过程 $\Phi=\{\Phi(z),z\in R_+^2\}$ 全体构成的线性空间：

(i) Φ 是 $\mathscr{A}$ 适应的.

(ii) $\Phi(z,\omega)$ 是 $\mathscr{B}(R_+^2)\times\mathscr{F}$ 可测的.

(iii) 对每个 $T>0$，记 $e(T)=(T,T)$，有

$$\|\Phi\|_{p,T}\equiv E\left[\int_0^{e(T)}|\Phi(z)|^p dz\right]^{\frac{1}{p}}<\infty. \tag{2.1}$$

14.3 记号 $F_0(\mathscr{A})$ 记号 $F_c(\mathscr{A})$ 表示满足记号 14.2 中 (i)(ii) 以及下面的条件的两参数过程 Φ 全体构成的线性空间：

(iii′) Φ 按下述意义有界：存在 $m>0$，以概率 1 成立

$$\sup_{z\in R_+^2}|\Phi(z)|\leqslant m. \tag{3.1}$$

(iv) 存在 $0=s_0\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots,0=t_0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots,s_i\uparrow\infty$, $t_j\uparrow\infty$,记 $z_{ij}=(s_i,t_j)\in R_+^2$,以概率 1 成立

$$\Phi(z)=\Phi(z_{ij}),\text{如果 } z\in[z_{ij},z_{i+1,j+1}),i,j=0,1,2\cdots \tag{3.2}$$

14.4 记号 $M(R_+^2\times\overline{W})$ 设 $\overline{W}=\{f:f$ 是定义在 R_+^2 上的实值函数$\}$. 对 $A\subset R_+^2$,记 $\mathscr{B}(\overline{W},A)=\sigma\{f\in\overline{W}: f(z_i)<c_i,z_i\in A,c_i\in R^1,1\leqslant i\leqslant n,n$ 为正整数$\}$. 特别地,$\mathscr{B}(\overline{W})=\mathscr{B}(\overline{W},R_+^2)$,$\mathscr{B}_z(\overline{W})=\mathscr{B}(\overline{W},R_z)$. 记号 $M(R_+^2\times\overline{W})$表示 $\mathscr{B}(R_+^2)\times\mathscr{B}(\overline{W})$可测映射 α: $R_+^2\times\overline{W}\to R^1$ 全体.

14.5 L—G 条件 设 $\alpha,\beta\in M(R_+^2\times W)$. 称 α,β 满足 Lipshitz 条件和增条件，简称 L—G 条件，如果存在 R_+^2上的 Borel 测度 λ (它在有界集上的值有限)，且对每个 $T>0$，存在 $L_T>0$，使对任意 $z\in R_{(T,T)}$和任意 $f,g\in\overline{W}$，都有

$$|\alpha(z,f)-\alpha(z,g)|^2+|\beta(z,f)-\beta(z,g)|^2$$
$$\leqslant L_T\left\{\int_0^z|f(y)-g(y)|^2\lambda(dy)+|f(z)-g(z)|^2\right\}. \tag{5.1}$$

$$|\alpha(z,f)|^2+|\beta(z,f)|^2$$
$$\leqslant L_T\left\{\int_0^z|f(y)|^2\lambda(dy)+|f(z)|^2+1\right\}. \tag{5.2}$$

14.6 记号 $L_2^c(\mathscr{A}|A)$ 设 $A\subset R_+^2$. 记号 $L_2^c(\mathscr{A}|A)$ 表示满足下面条件的两参数过程 $\Phi=\{\Phi(z),z\in A\}$ 全体：

(i) Φ 是 $\mathscr{A}$ 适应的，即对 $z\in A$，$\Phi(z)$ 是 $\mathscr{F}_z$ 可测的.

(ii) Φ 的样本函数在 A 上连续.

(iii) 对任意 $T>0$，以概率 1，

$$\nu(T,\Phi)=\sup_{z\in R_{(T,T)}\cap A}|\Phi(z)|^2<\infty \tag{6.1}$$

特别地，$A=\lambda_0, R_+^2, D_a=[a,\infty)(a\in R_+^2)$ 时，记号成为 $L_2^c(\mathscr{A}|\lambda_0), L_2^c(\mathscr{A}|R_+^2), L_2^c(\mathscr{A}|D_a)$.

14.7 定义 设存在 $\mathscr{A}$ 适应的 Brown 单 $B=\{B(z),z\in R_+^2\}$. 设 $\alpha,\beta\in M(R_+^2\times\overline{W})$. 称两参数过程 X 为方程

$$dX(z)=\alpha(z,X)dB(z)+\beta(z,X)dz, z\in R_+^2 \tag{7.1}$$

的解，如果

(i) X 是 $\mathscr{A}$ 适应的，且样本函数连续.

(ii) 对 $z\in R_+^2,\omega\in\Omega$,令 $\Phi(z,\omega)=\alpha(z,X(\omega)),\psi(z,\omega)=\beta(z,X(\omega))$. 则 $\Phi\in F_2(\mathscr{A}),\psi\in F_1(\mathscr{A})$.

(iii) 对任意 $z\in R_+^2$，以概率 1，

$$X(0,z]=\int_0^z\alpha(y,X)dB(y)+\int_0^z\beta(y,X)dy. \tag{7.2}$$

14.8 *Yeh* 定理 设 B 是 $\mathscr{A}$ 适应的 Brown 单，α，β 满足 L—G 条件. 给定 $Y\in L_2^c(\mathscr{A}|\lambda_0)$，且 Y 与 B 独立. 则方程 (1.1) 存在唯一解 $X\in L_2^c(\mathscr{A}|R_+^2)$.

§ 14.3 马氏型方程的解

14.9 $\widetilde{L}$—$\widetilde{G}$ 条件 记 $\widetilde{M}(R_+^2\times R^1)$为 $\mathscr{B}(R_+^2)\times\mathscr{B}(R^1)$可测映射 $\tilde{\alpha}:R_+^2\times R^1\to R^1$ 全体. 称 $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}\in\widetilde{M}(R_+^2\times R^1)$满足 $\widetilde{L}$—$\widetilde{G}$ 条件，如果存在 R_+^2上的 Borel 测度 λ(它在有界集上的值有限)，且对每个 $T>0$,存在 $L_T>0$,使对任意的 $z\in R_{(T,T)}$及任意 $f,g\in\overline{W}$，有

$$\begin{aligned}&|\tilde{\alpha}(z,f(z))-\tilde{\alpha}(z,g(z))|^2\\&+|\tilde{\beta}(z,f(z))-\tilde{\beta}(z,g(z))|^2\\\leqslant L_T\Big\{&\int_0^z|f(y)-g(y)|^2\lambda(dy)\end{aligned}$$

$$+ |f(z) - g(z)|^2\Big\}. \tag{9.1}$$

$$|\tilde{\alpha}(z, f(z))|^2 + |\tilde{\beta}(z, f(z))|^2$$
$$\leqslant L_T\Big\{\int_0^z |f(y)|^2 \lambda(dy) + |f(z)|^2 + 1\Big\}. \tag{9.2}$$

下面的引理 14.10 和定理 14.11 是显然的.

14.10 引理 设 $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ 满足 $\tilde{L}-\tilde{G}$ 条件. 对 $z \in R_+^2$, $f \in \overline{W}$, 令

$$\alpha(z,f) = \tilde{\alpha}(z, f(z)), \beta(z,f) = \tilde{\beta}(z, f(z)), \tag{10.1}$$

则 $\alpha, \beta \in M(R_+^2 \times \overline{W})$, 且 α, β 满足 $L-G$ 条件.

14.11 定理 设 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ 满足 $\tilde{L}-\tilde{G}$ 条件, $Y \in L_2^c(\mathscr{A}|\lambda_0)$ 且与 Brown 单 B 独立. 则方程(1.2)有唯一解 $X \in L_2^c(\mathscr{A}|R_+^2)$, 即 X 满足

(i) X 是 $\mathscr{A}$ 适应的, 且样本函数连续.

(ii) 令 $\Phi(z,\omega) = \tilde{\alpha}(z, X(z,\omega)), \psi(z,\omega) = \tilde{\beta}(z, X(z,\omega))$ 则 $\Phi \in F_2(\mathscr{A}), \psi \in F_1(\mathscr{A})$.

(iii) 对任意 $z \in R_+^2$, 以概率 1,

$$X(0,z] = \int_0^z \tilde{\alpha}(y, X(y))dB(y) + \int_0^z \tilde{\beta}(y, X(y))dy. \tag{11.1}$$

即

$$X(z) = -Y(0) + Y(0 \otimes z) + Y(z \otimes 0) + \int_0^z \tilde{\alpha}(y, X(y))dB(y) + \int_0^z \tilde{\beta}(y, X(y))dy. \tag{11.2}$$

14.12 注 依 Yeh 定理的证明, (1.2)的解 X 可如下得到: 令 $X^0(z) = -Y(0) + Y(0 \otimes z) + Y(z \otimes 0)$, 设 $X^n = \{X^n(z), z \in R_+^2\}$ 已经定义, (11.2) 右方用 $X^n(y)$ 代替 $X(y)$ 后的结果记为 $X^{n+1}(z)$, 则 $X^n(z) \to X(z)$, a.s..

设 $a \in R_+^2$, $D_a = [a, \infty)$, λ_a 是 D_a 的边界. 利用变换 $z \in D_a \to z - a \in R_+^2$, 并注意微分 $d(z-a) = dz$ 以及 $B_a(z) \equiv B(a, z]$, $z \in D_a$, 仍是 Brown 运动, 应用定理 14.11, 易得下面的定理.

14.13 定理 设 $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ 满足 $\tilde{L}-\tilde{G}$ 条件. 设 $a\in R_+^2$, $Y_a\in L_2^c(\mathscr{A}|\lambda_a)$ 且 Y_a 与 $B_a=\{B(a,z],z\in D_a\}$ 独立. 则方程

$$\left.\begin{array}{l} dX(z)=\tilde{\alpha}(z,X(z))dB(z)+\tilde{\beta}(z,X(z))dz,\ z\in D_a, \\ X|_{\lambda_a}=Y_a. \end{array}\right\} \tag{13.1}$$

存在唯一解 $X_a=\{X_a(z),z\in D_a\}$, $X_a\in L_2^c(\mathscr{A}|D_a)$. 即

(i) X_a 是 $\mathscr{A}$ 适应的，即对 $z\in D_a$, $X_a(z)$ 是 $\mathscr{F}_z$ 可测的，且 X_a 的样本函数在 D_a 上连续.

(ii) 对 $z\in D_a,\omega\in\Omega$, 令 $\Phi(z,\omega)=\tilde{\alpha}(z,X(z,\omega))$, $\psi(z,\omega)=\tilde{\beta}(z,X(z,\omega))$. 约定 $z\in R_+^2-D_a$ 时, $\Phi(z,\omega)=\psi(z,w)=0$. 则 $\Phi\in F_2(\mathscr{A})$, $\psi\in F_1(\mathscr{A})$.

(iii) 对 $z\in D_a$, 以概率 1,

$$X_a(a,z]=\int_a^z\tilde{\alpha}(y,X_a(y))dB(y)+\int_a^z\tilde{\beta}(y,X_a(y))dy. \tag{13.2}$$

即

$$\begin{aligned} X_a(z)=&-Y_a(a)+Y_a(a\otimes z)+Y_a(z\otimes a)\\ &+\int_a^z\tilde{\alpha}(y,X_a(y))dB(y)\\ &+\int_a^z\tilde{\beta}(y,X_a(y))dy, \text{对 } z\in D_a. \end{aligned} \tag{13.3}$$

14.14 定理 设 X 是方程 (1.2) 的解. 对 $a\in R_+^2$, 令 $Y_a=X|_{\lambda_a}$, X_a 是 (11.1) 的解. 则以概率 1,

$$X_a(z)=X(z), \text{对一切 } z\in D_a. \tag{14.1}$$

证 由 (11.2) 知 $Y_a=X|_{\lambda_a}$ 只依赖于 Y 和 $B(z)$, $z\leqslant a$, 故 Y_a 与 B_a 独立. 因 $X\in L_2^c(\mathscr{A}|R_+^2)$, 故由 (14.1) 确定的 $X_a\in L_2^c(\mathscr{A}|D_a)$. 剩下验证由 (14.1) 确定的 X_a 满足定理 14.13 中 (i)(ii)(iii). 由于 X 满足定义 14.7 中 (i)(ii)(iii), 故验证是平凡的. ∎

14.15 注 设 X 是 (1.2) 的解. 由 (13.3) (14.1) 得

$$X(z) = -X(a) + X(a \otimes z) + X(z \otimes a) + \int_a^z \tilde{\alpha}(y, X(y)) dB(y) + \int_a^z \tilde{\beta}(y, X(y)) dy, \text{对 } z \in D_a. \quad (15.1)$$

从上式及注 14.12 看出，X 在点 z 的值 $X(z)$ 按照(15.1)的关系依赖于 X 在 $a, a\otimes z, z\otimes a$ 三点的值 $X(a), X(a\otimes z), X(z\otimes a)$. 准确地说，存在函数 $g_a(z, x_1, x_2, x_3, \omega)$ $(z \in D_a, x_i \in R^1, i = 1,2,3, \omega \in \Omega)$，使对 $z \in D_a$，对几乎一切 $\omega \in \Omega$，成立

$$X(z,\omega) = g_a(z, X(a,\omega), X(a\otimes z,\omega), X(z\otimes a,\omega), \omega). \quad (15.2)$$

实际上，$g_a(z, x_1, x_2, x_3, \omega)$ 可如下得到：设 $z \in D_a$. 令 $g_a^0(z, x_1, x_2, x_3, \omega) = -x_1 + x_2 + x_3$. 设 g_a^n 已定义好，令

$$g_a^{n+1}(z, x_1, x_2, x_3) = -x_1 + x_2 + x_3 + \int_a^z \tilde{\alpha}(z, g_a^n(y, x_1, x_2, x_3)) dB(y) + \int_a^z \tilde{\beta}(y, g_a^n(y, x_1, x_2, x_3)) dy. \quad (15.3)$$

则 $g_a^n(z, x_1, x_2, x_3) \to g_a(z, x_1, x_2, x_3)$, a.s..

由随机积分的定义看出：

(i) 给定 $z \in D_a$, $g_a(z, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ 是 $\mathscr{B}(R^3) \times \mathscr{F}$ 可测的.

(ii) 给定 $z \in D_a$, $x_1, x_2, x_3 \in R^1$, $g(z, x_1, x_2, x_3, \cdot)$ 是 $\widetilde{\mathscr{F}}_a^z$ 可测的，且与 $\widetilde{\mathscr{F}}_a^*$ 独立. 这里

$$\widetilde{\mathscr{F}}_a^z = \sigma\{B(d,e] : (d,e] \subset (a,z]\}, \quad (15.4)$$

$$\widetilde{\mathscr{F}}_a = \sigma\{B(u,v), Y(u,o), Y(0,v) : (u,v) \in R_a\}, \quad (15.6)$$

$$\widetilde{\mathscr{F}}_a^* = \bigvee_{b \in R_a^*} \widetilde{\mathscr{F}}_b. \quad (15.7)$$

14.16 注 设 X 是 (1.2) 的解，初值 Y 在 λ_0 上是独立增量过

程. 设 $a=(u,0)\in\lambda_0, z=(u+s,t)\in D_a$. 则 $Y(u+s,0)-Y(u,0)=Y(z\otimes a)-Y(a)$ 是 $\widetilde{\mathscr{F}}_u^{1,u+s}$ 可测的,而且与 $\widetilde{\mathscr{F}}_u$ 独立. 其中

$$\widetilde{\mathscr{F}}_u^1=\bigvee_{v\geq 0}\widetilde{\mathscr{F}}_{uv}, \tag{16.1}$$

$$\widetilde{\mathscr{F}}_u^{1,u+s}=\sigma\{B(d,e],Y(u+s',0)-Y(u,0):(d,e]\subset(u,u+s]\times[0,\infty),0\leqslant s'\leqslant s\}. \tag{16.2}$$

此时,(15.1) 成为

$$X(z)=-Y(a)+X(a\otimes z)+Y(z\otimes a)+\int_a^z\tilde{\alpha}(y,X(y))dB(y)+\int_a^z\tilde{\beta}(y,X(y))dy,\ z\in D_a. \tag{16.3}$$

象注 14.15 一样,X 在 x 点的值 $X(z)$ 按(16.3)的关系依赖于 X 在点 $a\otimes z$ 的值 $X(a\otimes z)$. 准确地说,存在函数 $f_a(z,x,\omega)(z\in D_a,x\in R^1,\omega\in\Omega)$,使当 $z\in D_a$ 时,对几乎一切 $\omega\in\Omega$,

$$X(z,\omega)=f_a(z,X(a\otimes z,\omega),\omega). \tag{16.4}$$

而且

(i) 给定 $z\in D_a, f_a(z,\cdot,\cdot)$ 是 $\mathscr{B}(R^1)\times\mathscr{F}$ 可测函数.

(ii) 给定 $z\in D_a,x\in R^1,f_a(z,x,\cdot)$ 是 $\widetilde{\mathscr{F}}_u^{1,u+s}$ 可测的,且与 $\widetilde{\mathscr{F}}_u^1$ 独立.

14.17 注 设 X 是 (1.2) 的解,初值 Y 在 λ_0 上是独立增量过程. $a=(0,v)\in\lambda_0, z=(s,v+t)\in D_a$. 则存在函数 $h_a(z,x,\omega)(z\in D_a,x\in R^1,\omega\in\Omega)$,使当 $z\in D_a$ 时,对几乎一切 $\omega\in\Omega$,

$$X(z,\omega)=h_a(z,X(z\otimes a,\omega),\omega), \tag{17.1}$$

而且

(i) 给定 $z\in D_a$, $f_a(z,\cdot,\cdot)$ 是 $\mathscr{B}(R^1)\times\mathscr{F}$ 可测函数.

(ii) 给定 $z\in D_a$, $x\in R^1$, $h_a(z,x,\cdot)$ 是 $\widetilde{\mathscr{F}}_v^{2,v+t}$ 可测的,且与

$\widetilde{\mathscr{F}}^2_v$ 独立. 其中

$$\widetilde{\mathscr{F}}^2_v = \bigvee_{u\geq 0} \widetilde{\mathscr{F}}_{uv}, \tag{17.2}$$

$$\widetilde{\mathscr{F}}^{2,v+t}_v = \sigma\{B(d,e],Y(0,v+t')-Y(0,v):(d,e] \subset [0,\infty)\times(v,v+t],0\leqslant t'\leqslant t\}. \tag{17.3}$$

§14.4 马氏型方程解的各种马氏性

除了记号(15.4)——(15.7),(16.1)(16.2)(17.3)(17.4)外,还引进记号

$\mathring{\mathscr{F}}_z=\sigma\{X(a),a\in R_z\},\mathscr{G}_z=\sigma\{X(z)\}$, $z\in R^2_+$,相应地,有 $\mathring{\mathscr{F}}^1_z$, $\mathring{\mathscr{F}}^2_z$, $\mathring{\mathscr{F}}^*_z$ 等.

14.18 引理 $\mathring{\mathscr{F}}_z\subset\widetilde{\mathscr{F}}_z\subset\mathscr{F}_z$, $\mathring{\mathscr{F}}^*_z\subset\widetilde{\mathscr{F}}^*_z$. 如 Y 在 λ_0 上有独立增量,则 $\widetilde{\mathscr{F}}^{1,u+s}_u$ 与 $\widetilde{\mathscr{F}}^1_u$ 独立, $\widetilde{\mathscr{F}}^{2,v+t}_v$ 与 $\widetilde{\mathscr{F}}^2_v$ 独立.

证 由于 B,Y,X 均是 $\mathscr{A}$ 适应的,故 $\widetilde{\mathscr{F}}_z\subset\mathscr{F}_z$, $\mathring{\mathscr{F}}_z\subset\mathscr{F}_z$. 再由注 14.15, $X(z)=g_0(z,Y(0),Y(0\otimes z),Y(z\otimes 0))$,故 $X(z)$ 是 $\widetilde{\mathscr{F}}^z_0\vee\sigma\{Y(0),Y(0\otimes z),Y(z\otimes 0)\}\subset\widetilde{\mathscr{F}}_z$ 可测. 因此对任意 $a\in R_z,X(a)$ 是 $\widetilde{\mathscr{F}}_a\subset\widetilde{\mathscr{F}}_z$ 可测,从而 $\mathring{\mathscr{F}}_z\subset\widetilde{\mathscr{F}}_z$,从而 $\mathring{\mathscr{F}}^*_z\subset\widetilde{\mathscr{F}}^*_z$. 引理后半部结论明显. ∎

14.19 定理 设 X 是 (1.2) 的解. 则对任意 $a\in R^2_+$, $0<b\in R^2_+$, 有界 Borel 函数 $r(x)$, $x\in R^1$, 记 $z=a+b$, 则有

$$E\{r(X(z))|\widetilde{\mathscr{F}}^*_a\} = E\{r(X(z))|X(a),X(a\otimes z),X(z\otimes a)\}. \tag{19.1}$$

证 设函数 g_a 为注 14.15 中的函数,令

$$\Phi(x_1,x_2,x_3) = r(g_a(z,x_1,x_2,x_3)). \tag{19.2}$$

由注 14.15 中的 (i) (ii) 及 r 的性质知，Φ 有界，$\Phi(x_1,x_2,x_3,\omega)$ 是 $\mathscr{B}(R^3)\times\mathscr{F}$ 可测函数，且给定 $(x_1,x_2,x_3)\in R^3$ 时，$\Phi(x_1,x_2,x_3,\cdot)$ 是 $\widetilde{\mathscr{F}}_a^*$ 可测的，因而与 $\widetilde{\mathscr{F}}_a^*$ 独立．故欲证 (19.1)，只要证对具有上述性质的 Φ，有

$$E\{\Phi(X(a),X(a\otimes z),X(z\otimes a),\omega)\mid\widetilde{\mathscr{F}}_a^*\}$$
$$=E\{\Phi(X(a),X(a\otimes z),X(z\otimes a),\omega)\mid X(a),X(a\otimes z),X(z\otimes a)\}. \tag{19.3}$$

先考虑阶梯函数

$$\Phi(x_1,x_2,x_3,\omega)=\sum_{i,j,k}I_{A_i\times B_j\times C_k}(x_1,x_2,x_3)\Phi_{ijk}(\omega). \tag{19.4}$$

其中 $M_{ijk}=A_i\times B_j\times C_k\in\mathscr{B}(R^3)$，$\bigcup\limits_{i,j,k}M_{ijk}=R^3$，且 M_{ijk} 互不相交，Φ_{ijk} 是有界 $\widetilde{\mathscr{F}}_a^*$ 可测的，因而与 $\widetilde{\mathscr{F}}_a^*$ 独立．此时，由于 $X(a)$，$X(a\otimes z)$，$X(z\otimes a)$ 均是 $\widetilde{\mathscr{F}}_a^*$ 可测的，所以 $I_{M_{ijk}}(X(a),X(a\otimes z),X(z\otimes a))$ 为 $\widetilde{\mathscr{F}}_a^*$ 可测．故对任意 $A\in\widetilde{\mathscr{F}}_a^*$，有

$$E\{I_A\Phi(X(a),X(a\otimes z),X(z\otimes a),\omega)\}$$
$$=E\{I_A\sum_{i,j,k}I_{M_{ijk}}(X(a),X(a\otimes z),X(z\otimes a))\Phi_{ijk}(\omega)\}$$
$$=E\{I_A\sum_{i,j,k}I_{M_{ijk}}(X(a),X(a\otimes z),X(z\otimes a))\}E\Phi_{ijk}(\omega).$$

我们用 E' 表示对变元 ω' 取的期望，则上式等于

$$EI_A(\omega)E'\{\mathop{E}_{i,j,k}I_{M_{ijk}}(X(a,\omega),X(a\otimes z,\omega),$$
$$X(z\otimes a,\omega))\Phi_{ijk}(\omega')\}$$
$$=EI_A(\omega)E'\Phi(X(a,\omega),X(a\otimes z,\omega),X(z\otimes a,\omega),\omega').$$

显然，$\psi(\omega)=E'\Phi(X(a,\omega),X(a\otimes z,\omega),X(z\otimes a,\omega),\omega')$ 是 $\sigma\{X(a),X(a\otimes z),X(z\otimes a)\}\subset\widetilde{\mathscr{F}}_a^*$ 可测的，故(19.3)左方的值等于 $\psi(\omega)$，同理可以证明，(19.3) 的右方也等于 $\psi(\omega)$．从而 (19.3) 对阶梯函数 Φ 成立．对于有界的一般的 Φ，存在一致有界的

阶梯函数列$\{\Phi_n\}$，使$\Phi_n(x_1,x_2,x_3,\omega)\to\Phi(x_1,x_2,x_3,\omega)$，$a.s.$. 既然(19.3)对$\Phi_n$成立，从而取极限后对$\Phi$也成立. ∎

14.20 定义 设$a=(u,v)\in R^2_+$，$b=(s,t)>0$，$z=a+b\in D_a$. 设g_a为注 14.15 中的函数. 对$A\in\mathscr{B}(R^1)$，令

$$P(u,v;s,t;x_1,x_2,x_3,A)=P(g_a(z,x_1,x_2,x_3)\in A). \tag{20.1}$$

14.21 定理 设X是方程(1.2)的解. 则对$a=(u,v)\in R^2_+$，$b=(s,t)>0,A\in\mathscr{B}(R^1)$，有

$$\begin{aligned}&P\{X(u+s,v+t)\in A\,|\,\widetilde{\mathscr{F}}^*_{uv}\}\\&=P\{X(u+s,v+t)\in A\,|\,X(u,v),X(u,v+t),X(u+s,v)\}\\&=P(u,v;s,t;X(u,v),X(u,v+t),X(u+s,v),A),a.s.\end{aligned} \tag{21.1}$$

进而$\mathscr{P}=\{P(u,v;s,t;x_1,x_2,x_3,A):u,v\geqslant 0,s,t>0,x_i\in R^1,i=1,2,3,A\in\mathscr{B}(R^1)\}$为三点转移函数族，解$X$是规则宽过去马氏过程.

证 (21.1)第一个等号是(19.1)的特殊情形. 其次，注意，固定$z=a+b$时，$g_a(z,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$是$\mathscr{B}(R^3)\times\mathscr{F}$可测的，故固定$a,b,A$时，由(20.1)确定的$P(u,v;s,t;x_1,x_2,x_3,A)$关于$(x_1,x_2,x_3)$是$\mathscr{B}(R^3)$可测的. 故(21.1)右方是$\sigma\{X(u,v),X(u,v+t),X(u+s,v)\}$可测的. 再注意(15.2)，不难得(21.1)第二等号的两边在集合$\{X(u,v)\in\Gamma_1,X(u,v+t)\in\Gamma_2,X(u+s,v)\in\Gamma_3\}$上相等，从而可得(21.1)第二等号成立.

往证$\mathscr{P}$是三点转移函数族. 非负性和规范性明显. 水平转移性和竖直转移性也只需证其中之一. 往证水平转移性.

首先，由(20.1)推出，对有界 Borel 可测函数$r(x)$，$x\in R^1$，有：$a=(u,v)\in R^2_+$，

$$\int_{R^1}P(u,v;s,t;x_1,x_2,x_3,d\eta)r(\eta)$$

$$= \int_{\Omega} r(g_a(u+s, v+t, x_1, x_2, x_3))dP. \tag{21.2}$$

其次，在上式中取 $r(\eta) = P(u+s, v; s', t; \xi, \eta, x_3, A)$，上式成为

$$\int_{R^1} P(u, v; s, t; x_1, x_2, \xi, d\eta) P(u+s, v; s', t; \xi, \eta, x_3, A)$$

$$= EP(u+s, v; s', t; \xi, g_a(u+s, v+t, x_1, x_2, \xi), x_3, A)$$

$$= EI_A[g_{(u+s,v)}(s', t, \xi, g_a(s, t, x_1, x_2, x_3), x_3)]. \tag{21.3}$$

由于（15.1），记 $M = (a, (u+s, v+t)]$，$N = ((u+s, v), (u+s+s', v+t)]$，则

$$g_a(u+s+s', v+t, x_1, x_2, x_3)$$

$$= -x_1 + x_2 + x_3 + \int_{M\cup N} \tilde{\alpha}\, dB + \int_{M\cup N} \tilde{\beta} dy$$

$$= -x_1 + x_2 + \xi + \int_{M} \tilde{\alpha}\, dB$$

$$+ \int_{M} \tilde{\beta} dN + (-\xi) + x_3 + \int_{N} \tilde{\alpha}\, dB + \int_{N} \beta\, dy$$

$$= g_a(u+s, v+t, x_1, x_2, \xi) + (-\xi) + x_3 + \int_{N} \tilde{\alpha} dB + \int_{N} \tilde{\beta} dy$$

$$= g_{(u+s,v)}(u+s+s', v+t, \xi, g_a(u+s, v+t, x_1, x_2, \xi), x_3).$$

于是（21.3）等于

$$EI_A[g_a(u+s+s', v+t, x_1, x_2, x_3)]$$

$$= P(u, v; s+s', t; x_1, x_2, x_3, A).$$

即水平转移性成立. ∎

14.22 定理 设 X 是方程（1.2）的解. 则 X 关于自然 σ 域 $\mathring{\mathscr{A}} = \{\mathring{\mathscr{F}}_z, z \in R^2_+\}$ 有宽过去马氏性.

证 由引理 14.8，$\mathring{\mathscr{F}}^*_a \subset \widetilde{\mathscr{F}}^*_a$，利用（19.1），对 $z \in D_a$，

$$P\{X(z) \in A | \mathring{\mathscr{F}}^*_a\} = P\{P[X(z) \in A | \widetilde{\mathscr{F}}^*_a] | \mathring{\mathscr{F}}^*_a\}$$

$$= P\{P[X(z) \in A | X(a), X(a \otimes z), X(z \otimes a)] | \mathring{\mathscr{F}}^*_a\}$$

$= P\{X(z) \in A | X(a), X(a \otimes z), X(z \otimes a)\}.$ ∎

14.23 定理 设初始过程 Y 在 λ_0 上有独立增量，X 是方程 (1.2) 的解. 则 X 关于 $\widetilde{\mathscr{A}} = \{\widetilde{\mathscr{F}}_z, z \in R_+^2\}$ 具有 i 马氏性，$i = 1, 2$.

证 只证 1 马氏性，其余类似. 对任意 $a = (u, 0) \in R_+^2$, $b_i = (s, t_i)$, $z_i = a + b_i \in D_a$, $i = 1, \cdots, n$. 依注 14.16，存在函数 f_a，具有注 14.16 的性质 (i) (ii)，而且

$$X(z_i, \omega) = f_a(z_i, X(a \otimes z_i, \omega), \omega). \tag{23.1}$$

对有界的 Borel 可测函数 $r(a_1, \cdots, a_n)$，令

$$\psi(x_1, \cdots, x_n, \omega) = r(f_a(z_1, x_1, \omega), \cdots, f_a(z_n, x_n, \omega)). \tag{23.2}$$

则 ψ 是 $\mathscr{B}(R^n) \times \mathscr{F}$ 可测的，且给定 $(x_1, \cdots, x_n)$ 时，$\psi(x_1, \cdots, x_n, \cdot)$ 是 $\widetilde{\mathscr{F}}_u^{1, u+s}$ 可测的，从而与 $\widetilde{\mathscr{F}}_u^1$ 独立. 故要证 1 马氏性，只要对这样的 $\psi(x_1, \cdots, x_n)$，证明

$$\begin{aligned} &E\{\psi(X(a \otimes z_1), \cdots, X(a \otimes z_n), \omega) | \widetilde{\mathscr{F}}_u^1\} \\ &= E\{\psi(X(a \otimes z_1), \cdots, X(a \otimes z_n), \omega) | X(a \otimes z_i), \\ &\quad i = 1, \cdots, n\}. \end{aligned} \tag{23.3}$$

而这可用类似于证 (19.3) 的方法证明. 设阶梯函数

$$\psi(x_1, \cdots, x_n, \omega) = \sum_{i_1, \cdots, i_n} I_{A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_n}}(x_1, \cdots, x_n) \psi_{i_1 \cdots i_n}(\omega). \tag{23.4}$$

其中 $A_i \in \mathscr{B}(R^1)$, $M(i_1, \cdots, i_n) = A_{i_1} \times \cdots \times A_{i_n}$ 两两不相交，且 $\sum_{i_1, \cdots, i_n} M(i_1, \cdots, i_n) = R^n$, $\psi_{i_1, \cdots, i_n}(\omega)$ 是有界 $\widetilde{\mathscr{F}}_u^{1, u+s}$ 可测函数，因而与 $\widetilde{\mathscr{F}}_u^1$ 独立. 先对阶梯函数 ψ 证明 (23.3)，然后，对有界的一般 ψ，存在一致有界的阶梯函数列 $\{\psi_n\}$, $\psi_n \to \psi$, $a.s.$，可得 (23.3) 对有界的一般的 ψ 成立. ∎

14.24 定理 设 Y 在 λ_0 上有独立增量，X 是方程 (1.2) 的解.

则 X 关于 $\mathring{\mathscr{A}}=\{\mathring{\mathscr{F}}_z,\ z\in R_+^2\}$ 有 i 马氏性 $(i=1,\ 2)$.

证 由引理 14.18, $\mathring{\mathscr{F}}_z\subset\widetilde{\mathscr{F}}_z$, 从而有 $\mathring{\mathscr{F}}_u^1\subset\widetilde{\mathscr{F}}_u^1$, $\mathring{\mathscr{F}}_v^2\subset\widetilde{\mathscr{F}}_v^2$. 利用此关系再仿定理 14.22 的证明. ∎

14.25 定理 设 Y 在 λ_0 上有独立增量, X 是方程 (1.2) 的解. 则

(i) 设区域 $D\subset R_+^2$, 它的边界 ∂D 由平行于坐标轴的直线段组成, 其中每一线段的长均不小于某正数 ε. 则 X 关于 $\mathring{\mathscr{A}}=\{\mathring{\mathscr{F}}_z,\ z\in R_+^2\}$ 和 D 具有 Levy 马氏性.

(ii) 设区域 $D\subset R_+^2$. 对 $z\in R_+^2$, $D\cap R_z$ 只有有限多个不相交的部分, 且每一部分有逐段光滑的边界. 则 X 关于 $\mathring{\mathscr{A}}=\{\mathring{\mathscr{F}}_z,\ z\in R_+^2\}$ 和 D 有宽 Levy 马氏性.

证 由定理 14.24, X 关于 $\mathring{\mathscr{A}}$ 有 i 马氏性 $(i=1,2)$, 依 § 3.12 关系图得证定理. ∎

§ 14.5 较强条件下马氏型方程的解及其估计

14.26 定理 设 $Y\in L_2^c(\mathscr{A}\,|\,\lambda_0)$, 且与 Brown 单 B 独立. $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}\in\tilde{M}(R_+^2\times R^1)$ 满足: 对每个 $T>0$, 存在常数 K_T, 使 $z\in R_{(T,T)}$, $x,\ y\in R^1$, 有

$$|\tilde{\alpha}(z,x)-\tilde{\alpha}(z,y)|\leqslant K_T|x-y|,\tag{26.1}$$

$$|\tilde{\beta}(z,x)-\tilde{\beta}(z,y)|\leqslant K_T|x-y|,\tag{26.2}$$

$$|\tilde{\alpha}(z,x)|\leqslant K_T(1+|x|),\tag{26.3}$$

$$|\tilde{\beta}(z,x)|\leqslant K_T(1+|x|),\tag{26.4}$$

则方程 (1.2) 存在唯一解 $X\in L_2^c(\mathscr{A}\,|\,R_+^2)$.

证 只要验证 $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ 满足 $\tilde{L}-\tilde{G}$ 条件. 设 $f,g\in\overline{W}$. 则

$$|\tilde{\alpha}(z,f(z))-\tilde{\alpha}(z,g(z))|^2+|\tilde{\beta}(z,f(z))-\tilde{\beta}(z,g(z))|^2\leqslant 2K_T|f(z)-g(z)|^2.\tag{26.5}$$

$$|\tilde{\alpha}(z,f(z))|^2+|\tilde{\beta}(z,f(z))|^2$$

$$\leqslant 2K_T^2(1+|f(z)|)^2\leqslant 4K_T^2(1+|f(z)|^2). \qquad (26.6)$$

故 $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ 满足 $\tilde{L}-\tilde{G}$ 条件. ∎

14.27 定理 设 $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ 满足定理 14.26 的条件 (26.1)——(26.4). 设 $a\in R_+^2, Y_a\in L_2^c(\mathscr{A}|\lambda_a)$ 且 Y_a 与 $B_a=\{B(a,z], z\in D_a\}$ 独立. 则方程(13.1)存在唯一解 $X_a=\{X_a(z), z\in D_a\}, X_a\in L_2^c(\mathscr{A}|D_a)$.

证 由定理 14.26 及平移变换 $z\in D_a\to z-a\in R_+^2$ 得出. ∎

14.28 引理 设 X 是定理 14.26 中的解. 则对每个 $T>0$, $z\in R_{(T,T)}$, 记 $M_T=R_{(T,T)}\cap\lambda_0$, 有

$$E|X(z)|^2\leqslant C_T(1+\sup_{a\in M_T}|Y(a)|^2)e^{c_T|z|}. \qquad (28.1)$$

$$E\{\sup_{a\in R_z}|X(0,a]|^2\}\leqslant d_T(1+\sup_{a\in M_T}E|Y(a)|^2)|z|. \qquad (28.2)$$

其中 $|z|$ 是 $(0,z]$ 的面积. c_T, d_T 为依赖于 T 的常数.

证 先证 (28.1). 设 X^i 按注 14.12 中定义. 由 (26.3) (26.4),

$$E|X^i(z)|^2\leqslant 5\sup_{a\in M_T}E|Y(a)|^2$$

$$+5E\left|\int_0^z\tilde{\alpha}(y,X^{i-1}(y))dB(y)\right|^2$$

$$+5E\left|\int_0^z\tilde{\beta}(y,X^{i-1}(y))dy\right|^2$$

$$\leqslant 5\sup_{a\in M_T}E|Y(a)|^2+5E\int_0^z|\tilde{\alpha}(y,X^{i-1}(y))|^2dy$$

$$+5T^2E\int_0^z|\tilde{\beta}(y,X^{i-1}(y))|^2dy$$

$$\leqslant 5\sup_{a\in M_T}E|Y(a)|^2+10K_T^2\int_0^zE(1+|X^{i-1}(y)|^2)dy$$

$$+20K_T^2T^2\int_0^zE(1+|X^{i-1}(y)|^2)dy.$$

$$\leqslant c_T(1+\sup_{a\in M_T}E|Y(a)|^2)+c_T\int_0^zE|X^{i-1}(y)|^2dy. \qquad (28.3)$$

这里 c_T 是依赖于 T 的常数. 归纳递推得

$$E|X^i(z)|^2 \leqslant (c_T + c_T^2|z| + c_T^3|z|^2/2! + \cdots + c_T^{i+1}|z|^i/i!)\cdot(1+\sup_{a\in M_T} E|Y(a)|^2). \tag{28.4}$$

由于 $X^i(z)\to X(z)$, $a.s.$, 由 *Fatou* 引理, 从上式得(28.1).

往证(28.2). 显然,

$$\begin{aligned}&\sup_{a\in R_z}|X(0,a]|^2\\ &\leqslant 2\sup_{a\in R_z}\left|\int_0^a \widetilde{\alpha}(y,X(y))dB(y)\right|^2\\ &\quad + 2\left[\int_0^z|\widetilde{\beta}(y,X(y))|dy\right]^2\end{aligned} \tag{28.5}$$

两边取期望, 利用 (26.3) (26.4) 可得

$$\begin{aligned}&E\sup_{z\in R_z}|X(0,a]|^2\\ &\leqslant 2^5\sup_{a\in R_z}E\left|\int_0^a \widetilde{\alpha}(y,X(y))dB(y)\right|^2\\ &\quad + 2E\left[\int_0^z|\widetilde{\beta}(y,X(y))|dy\right]^2\\ &\leqslant 32\sup_{a\in R_z}E\int_0^a|\widetilde{\alpha}(y,X(y))|^2dy + 2T^2E\int_0^z|\widetilde{\beta}(y,X(y))|^2dy\\ &\leqslant 64K_T^2\sup_{a\in R_z}\int_0^a E(1+|X(y)|^2)dy\\ &\quad + 8K_T^2T^2\int_0^z E(1+|X(y)|^2)dy\\ &\leqslant 64K_T^2\sup_{a\in R_z}\int_0^a [1+c_T^*(1+\sup_{b\in M_T}E|Y(b)|^2)]dy\\ &\quad + 8K_T^2T^2\int_0^z[1+c_T^*(1+\sup_{b\in M_T}|Y(b)|^2)]dy\\ &\leqslant d_T(1+\sup_{b\in M_T}E|Y(b)|^2)|z|.\end{aligned}$$

∎

14.29 注 设 $a\in R_+^2$, $Y_a\in L_2^c(\mathscr{A}|\lambda_a)$, Y_a 与 B_a 独立. 设 $X_a=\{X_a(z),z\in D_a\}$ 是方程(13.1)的解, 则对 $T>0$ 及任意 $z\in D_a\cap R_{(T,T)}$, 记 $M_{Ta}=R_{(T,T)}\cap\lambda_a$, 有

$$E|X_a(z)|^2\leqslant c_T(1+\sup_{b\in M_{Ta}}|Y_a(b)|^2)e^{A_T|z|}. \tag{29.1}$$

$$E(\sup_{b\in[a,z]}|X_a(a,b]|^2)\leqslant B_T(1+\sup_{b\in M_{Te}}|Y_a(b)|^2)|z|.$$

(29.2)

其中 A_T,B_T 是依赖于 T 的常数.

14.30 引理 设 $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ 满足定理 14.26 中的条件. 设 $a=(u,v)\in R_+^2$, g_a 是注 14.15 中的函数. 设 $T>0,r>0$. 对 $b=(s,t)>0$, $b_1=(s_1,t_1)>0,z=a+b,z_1=a+b+b_1$, 有

$$E\{\sup_{z_1\in R_{(T,T)}\cap D_a}|g_a(z_1,x_1,x_2,x_3)-g_z(z_1,x'_1,x'_2,x'_3)|^2$$
$$\leqslant K_{rT}[|x_1-x'_1|^2+|x_2-x'_2|^2+|x_3-x'_3|^2$$
$$+st+s(t+t_1)+(s+s_1)t]. \tag{30.1}$$

这里 $\max\{|x_i|,|x_i'|,i=1,2,3\}\leqslant r$, 而 K_{rT} 为依赖于 r 和 T 的常数.

证 由解的性质和唯一性知

$$g_a(z_1,x_1,x_2,x_3)-g_z(z_1,x'_1,x'_2,x'_3)$$
$$=\{g_a(u+s,v+t+t_1;x_1,x_2,\bar{x}_3)+g_a(u+s+s_1,v+t,x_1,\bar{x}_2,x_3)-g_a(u+s,v+t,x_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)+x'_1-x'_2-x'_3\}+\int_0^{b_1}\{\tilde{\alpha}[z+\xi,g_a(z+\xi,x_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3)]-\tilde{\alpha}[a+\xi,g_z(z+\xi,x'_1,\tilde{x}'_2,\tilde{x}'_3)]\}dB(z+\xi)+\int_0^{b_1}\{\tilde{\beta}[z+\xi,g_a(z+\xi,x_1,\tilde{x}'_2,\tilde{x}'_3)]-\tilde{\beta}[z+\xi,g_z(\xi,x'_1,\tilde{x}'_2,\tilde{x}'_3)]\}d(z+\xi)\equiv\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3\equiv\Delta(z_1). \tag{30.2}$$

设 $T>0$, 并记 $e(T)=(T,T)$. 下面的 Sup 均是对 $z_1\in R_{(T,T)}\cap D_a$ 而取的. 当 $\max\{|x_i|,|x'_i|:i=1,2,3\}\leqslant r$ 时, 有

$$E\sup|\Delta_1|^2\leqslant 4E\sup|g_a(u+s,v+t+t_1,x_1,x_2,\bar{x}_3)+x_1-x_2-\bar{x}_3|^2+4E\sup|g_a(u+s+s_1,v+t,x_1,\bar{x}_2,x_3)+x_1-\bar{x}_2-x_3|^2$$
$$+4E\sup|g_a(u+s,v+t,x_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)+x_1-\bar{x}_2-\bar{x}_3|^2$$
$$+4[(x'_1-x_1)-(x'_2-x_2)-(x'_3-x_3)]^2$$
$$\leqslant 4K_T^{(1)}s(t+t_1)+4K_T^{(2)}(s+s_1)t+4K_T^{(3)}st$$
$$+12[(x_1-x'_1)^2+(x_2-x'_2)^2+(x_3-x'_3)^2]$$

$$\leqslant \widetilde{K}_{rT} M. \tag{30.3}$$

其中 $M = st + s(t + t_1) + (s + s_1)t + (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2$. 由(30.2)和(26.1)(26.2)及上述推导得

$$E\sup|\Delta(z + b_1)|^2 \leqslant 3E\sup|\Delta_1|^2 + 3\sup|\Delta_2|^2 + 3\sup|\Delta_3|^2$$

$$\leqslant 3\widetilde{K}_{rT} M + 96K_T^2 E\int_0^{e(T)-z} |\Delta(z + \xi)|^2 d\xi$$

$$+ 6T^2 K_T^2 E\int_0^{e(T)-z} |\Delta(z + \xi)|^2 d\xi$$

$$\leqslant K_{rT}^* M + K_{rT}^* \int_0^{e(T)-z} E|\Delta(z + \xi)|^2 d\xi. \tag{30.4}$$

利用 (30.4) 反复迭代 n 次可得

$$E\sup|\Delta(z + b_1)|^2 \leqslant K_{rT}^* M + K_{rT}^{*2} M[(T - u - s)(T - v - t)] + \cdots$$

$$+ K_{rT}^{*n+1} M[(T - u - s)(T - v - t)]^n/n! +$$

$$K_{rT}^* \int_0^{e(T)-z}\int_0^{e(T)-z}\cdots\int_0^{e(T)-z} E|\Delta(z + \xi_n)|^2 d\xi_n d\xi_{n-1}\cdots d\xi_1 d\xi$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{n} K_{rT}^{*l} \frac{[(T - u - s)(T - v - t)]^l}{l!} M$$

$$+ 2R(T,X) K_{rT}^{*n+1} [(T - u - s)(T - v - t)]^{n+1}/(n + 1)! \tag{30.5}$$

其中 $R(T,X) = \sup\limits_{\xi \in R_{(T,T)}} E|X(\xi)|^2 < \infty$(因为解 $X \in L_2^c(\mathscr{A}|D_z)$).

故 $n \to \infty$ 时，(30.5) 右方最后一项趋于零，从而由 (30.5) 得

$$E\sup|\Delta(z + b_1)|^2 \leqslant MK_{rT}^* e^{K_{rT}^*(T-u-s)(T-v-t)},$$

从而得(30.1). ∎

§ 14.6 较强条件下马氏型方程解的宽过去强马氏性

14.31 定义 设 $\mathscr{P} = \{P(u,v,s,t;x,y,z,A),(u,v) \in R_+^2, 0 < (s,t) \in R_+^2, x,y,z \in R, A \in B\}$ 为三点转移函数族. 称 $\mathscr{P}$ 是 Feller 的，如果对任意 $0 < (s,t) \in R_+^2$，任意有界连续函数 $f(\xi)$，$\xi \in R$，函数

$$P(u,v,s,t,x,y,z,f) = \int_R P(u,v,s,t,x,y,z,d\xi)f(\xi), \tag{31.1}$$

在下述意义下连续：任给 (u_0,v_0,x_0,y_0,z_0)，当 $(u,v) \leqslant (u_0,v_0)$ 且 $(u,v,x,y,z) \to (u_0,v_0,x_0,y_0,z_0)$ 时，以及当 $(u,v) \geqslant (u_0,v_0)$ 且 $(u,v,x,y,z) \to (u_0,v_0,x_0,y_0,z_0)$ 时，均有

$$P(u,v,s,t,x,y,z,f) \to P(u_0,v_0,s,t,x_0,y_0,z_0,f). \tag{31.2}$$

设 X 是定理 14.26 中方程 (1.2) 的解. 定理 14.21 已指出，X 是规则的宽过去马氏过程，其三点转移函数族 $\mathscr{P}$ 由 (20.1) 确定. 我们指出：$\mathscr{P}$ 是 Feller 的. 由于 X 是连续的，又 $\mathscr{P}$ 是 Feller 的，从而 X 是宽过去强马氏过程.

14.32 定理 X 的三点转移函数族 $\mathscr{P}$ 是 Feller 的.

证 设 $0<(\tilde{s},\tilde{t})\in R_+^2$ 固定，f 是有界连续函数. 设 $a_1=(u_1,v_1)\leqslant a_2=(u_2,v_2)$.

(i) 设 (u_1,v_1,x,y,z) 固定. 设 $a_2=a_1+(h,k)$，且 $(h,k)\leqslant(\tilde{s},\tilde{t})$，$\tilde{s}=h+s_1$，$\tilde{t}=k+t_1$. 利用(21.2)，

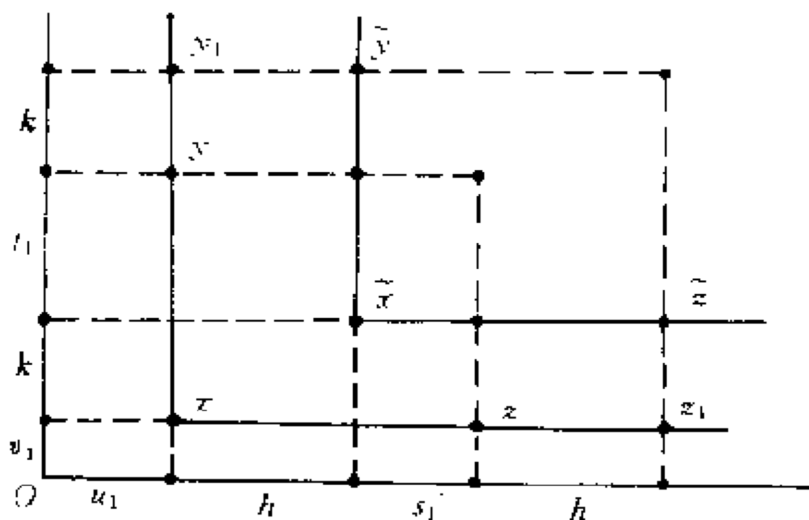


图 13

$$|P(u_2,v_2,\tilde{s},\tilde{t},\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},f) - P(u_1,v_1,\tilde{s},\tilde{t},x,y,z,f)| \leqslant$$
$$|P(u_2,v_2,\tilde{s},\tilde{t},\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},f) - P(u_1,v_1,h+\tilde{s},k+\tilde{t},x,y_1,z_1,f)|$$

$+ |P(u_1,v_1,h+\tilde{s},k+\tilde{t},x,y_1,z_1,f) - P(u_1,v_1,\tilde{s},\tilde{t},x,y,z,f)| \leqslant E|f[g_{a_2}(u_2+\tilde{s},v_2+\tilde{t},\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})] - f[g_{a_1}(u_1+h+\tilde{s},v_1+k+\tilde{t},x,y_1,z_1)]| + E|f[g_{a_1}(u_1+h+\tilde{s},v_1+k+\tilde{t},x,y_1,z_1)] - f[g_a(u_1+\tilde{s},v_1+\tilde{t},x,y,z)]|$ (32.1)

当$(u_2,v_2,\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\to(u_1,v_1,x,y,z)$时，(32.1)右方第一项趋于0. 实际上，由于$|\tilde{y}-y_1|\leqslant|\tilde{y}-y|+|y-y_1|$，$|\tilde{z}-z_1|\leqslant|\tilde{z}-z|+|z-z_1|$，以及解过程的连续性，由图看出，当$(u_2, v_2)\to(u_1, v_1)$，$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})\to(x, y, z)$时，可推得$h\to0$，$k\to0$，$y_1\to y$，$z_1\to z$，从而同时可得$h\to0$，$k\to0$，$\tilde{x}\to x_1$，$\tilde{y}\to y_1$，$\tilde{z}\to z_1$，故由引理14.30的估计知

$$g_{a_2}(u_2+\tilde{s},v_2+\tilde{t},\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) \to g_{a_1}(u_1+s+\tilde{s},v_1+t+\tilde{t},x_1,y_1,z_1) \qquad (32.2)$$

再由f的有界连续性，利用控制收敛定理知，(32.1)右方第一项趋于0.

类似地可得

$$g_{a_1}(u_1+h+\tilde{s},v_1+k+\tilde{t},x,y_1,z_1) \to g_{a_1}(u_1+\tilde{s},v_1+\tilde{t},x_1,y,z) \qquad (32.3)$$

再利用f的有界连续性和控制收敛定理，可得(32.1)右方第二项趋于0. 从而(32.1)左方趋于0. 即P关于(u, v)右上连续.

(ii) P关于(u, v)左下连续的证明类似(i). ∎

14.33 定理 X是宽过去强马氏过程.

证 利用定理14.32和X的连续性可得. ∎

注　　释

本注释中引用的文献，一般地是作者写本书时的主要参考依据. 除特别说明外，不必是主要结果的最早出处.

第1章

§1—§2　只是一些常用的记号和术语，主要参照杨向群与李应求[1]和谢语权[1].

§3　本节内容是熟知的基础结论，取自严加安[1].

§4　主要参考王梓坤[2]和杨向群[1]. 定理1.18取自杨向群与谢语权[1].

§5　主要参考 *Rozanov* [1] 和王梓坤的一份未公开出版的讲稿. 定理1.36和定理1.37取自谢语权[1].

第2章

主要参考 Imkeller [1] 和 Walsh [1].

第3章

§1—§7　主要参考王梓坤[4]，谢语权[1]，Korezligolu 与 Lefort[1]，Korezligolu 与 Lefort，Mazziotto [1]. 定理3.21取自黄长全[1].

§8　参考杨振明[1].

§9　主要参考李应求[5]、邹东雅[1]和黄长全[1].

§10　参考罗首军[1].

§11　参考黄长全[2].

§12　参考李应求[5].

第4章　参考杨向群与向红锋[1].

第5章

§1　参考谢语权[2].

§2　主要参考周健伟[2]和罗首军[2].

§3　参考罗首军[2].

§4　主要参考周健伟 [1] [3].

§5　参考戴永隆与周健伟 [1].

§6　参考杨振明 [2].

§7—§11　主要参考周健伟与周晓文 [2].

§12　参考杨向群与向红铮 [2，3].

第6章　主要参考郭军义与杨向群 [1]，谢语权 [2].

第7章　主要参考郭军义与杨向群 [1] 和谢语权 [2].

第8章　参考杨向群与刘良欣 [1].

第9章

§1—§4　主要参考 Adler 等的 [1].

§5　参考邹东雅 [1].

§6　参考李应求 [6].

§7　参考罗首军 [4].

第10章　参考李应求 [2].

第11章

§1—§5　参考杨向群与郭学鹏 [1]，李应求 [4].

§6　参考李应求与杨向群 [1].

§7—§8　参考王桂兰与杨向群 [1].

§9　参考李应求与杨向群 [1].

§10—§11　参考杨向群与郭学鹏 [1].

§12　参考李应求 [4].

第12章　主要参考 Walsh [1].

第13章

§1—§3　参考王梓坤 [3].

§4　参考李应求 [3].

§5　参考薛行雄 [1].

§6　参考王梓坤 [5].

第14章

§1—§2　参考 Yeh [1].

§3—§5　参考贺湘民 [1].

参 考 文 献

王梓坤

［1］随机过程，科学出版社，北京，1978.

［2］生灭过程与马尔科夫链，科学出版社，北京，1980.

［3］二参数Ornstein－Uhlenbeck过程，数学物理学报，1983；3(4)：395—406.

［4］两指标马尔可夫过程，工程数学学报，1984；1(1)：1—6.

［5］二参数Ornstein－Uhlenbeck过程的转移概率及预测，科学通报，1986；(23)：1761—1764.

［6］二参数正态过程的马尔科夫性，科学通报，1992；(15)：1345—1347.

［7］多参数无穷维OU过程与布朗运动，数学物理学报，1993；13(4)：455—459.

王梓坤与杨向群

［1］The birth and death processes and Markov chains，Springer－Verlag，Science Press，1992

王桂兰

［1］两参数泊松过程的性质及预测，湘潭大学自然科学学报，1991；13(3)：26—30.

王桂兰与杨向群

［1］两参数Poisson过程的存在定理，长沙水电师院学报（自然科学版），1992；7(2)：132－138.

王岳宝

[1]关于多指标强极限定理的一个猜测及深入讨论，应用概率统计，1995；11(1)：13—19.

卡札凯维奇 д. п.

[1] 随机函数论原理及其在水文气象学中的应用，1974

孔繁超

[1]两参数 Wiener 过程的增量的若干结果，应用概率统计，1987；3(2)：144—150.

[2] 两参数 Wiener 过程的增量有多小，数学学报，1987；30(3)：404—411.

邓永录与梁之舜

[1] 随机点过程及其应用，科学出版社，1992.

邓永录

[1] 随机模型及其应用，高等教育出版社，1994.

邓迎春

[1] 不可逆平稳 Q-过程的轨道分解，应用概率统计，1995，11(3)，315—321.

[2] 多维 Q 过程的漂移测度和 Girsanov 变换，湘潭大学学报，1993，15(4)，22—34.

卢科学与施仁杰

[1] 两指标 AR 过程的修正 LS 估计的强相合速度，数学杂志，1988；8(3)：219—230.

冯慈璜

[1] 关于 Serfling 两个定理的拓广，杭州大学学报，1988；15(1)：25—30.

向红锋与李应求

[1] 广义 OUP_2 的马氏性、转移概率和预测，数学杂志，1994；14(1)：141—146.

江泽培

[1] 平稳随机场的预测理论（I）半平面预测，北京大学学报（自然科学版），1989；25(1)：25—50.

庄兴无

[1] 两指标鞅，福建师大学报（自然科学版），1982；13(2)：97—108.

[2] 广义布朗单和两参数 Harnesses. 福建师范大学报（自然科学版），1988；4(4)：1—9.

庄兴无与李继陶

[1] 局部 (F_4) 条件和两指标鞅 a. s 收敛性，数学学报，1987；30 (3)：412—418.

庄兴无与李新春

[1] 关于广义 Brownian sheet 样本函数的连续性，应用概率统计，1987；3 (3)：279.

刘韶跃与杨向群

[1]两参数马氏链的标准三点转移函数的微分性质，湘潭大学自然科学学报，1992；14 (1)：23—25.

朱力行

[1] 双下标独立随机变量和的大数律，科学通报，1985；(21)：1614—1615.

李应求

[1] 一类两参数反向鞅，湘潭大学自然科学学报，1988；10(4)：11—13.

[2] 二参数平稳随机事件流，湘潭大学自然科学学报，1989；11(3)：13—20.

[3] 二参数 Ornstein－Uhlenbeck 过程在射线上的导出过程. 应用概率统计，1989；5(4)：303—306.

[4] Poisson 单，数学物理学报，1991，11(1)：70—79.

[5] 各种两参数马氏性间关系的注. 数学年刊 A 辑，1992；13(6)：688—691.

[6] 一类两参数 Poisson 型随机微分方程解的存在唯一性，湘潭大学自然科学学报，1990；12(1)：14—18.

[7] 两参数自型过程的刻划，湘潭大学自然科学学报，1991；13(1)：25—28.

[8] 两参数马氏过程的嵌入与分布变换，长沙水电师院学报（自然科学版），1993；8(4)：337—340.
[9] 两参数自相似过程. 长沙电力学院学报（自然科学版），1995；10(1)：6—10.

李应求与曹显兵
[1] 两参数单点转移函数的一般性质，湖南数学年刊，1995；15(1)：34—39.

李德立
[1] 多指标强极限定理的一些结果，数学学报，1990；3：402—413.

严加安
[1] 鞅与随机积分引论，上海科技出版社，上海，1981.

何声武、汪家冈、严加安
[1] 半鞅与随机积分，科学出版社，北京，1995.

肖益民
[1] 两参数 Ornstein Uhlenbeck 过程的自相交局部时与 k 重时的维数，数学年刊 A 辑，1995；16(1)：8—15.
[2] 二参数 Ornstein－Uhlenbeck 过程的象集的一些性质，数学杂志，1992；12：237—240.

邹东雅
[1] 关于 Levy－Markov 性的几点注记. 科学通报，1989；(7)：490—491.
[2] 两指标 Levy Markov 性，数学物理学报，1992；12(2)：176—181.

陈木法
[1] 跳过程与粒子系统，北京师范大学出版社，北京，1986.

陈培德与陈宗洵
[1] Young 函数及其在多指标随机过程中的应用，福建师范大学学报（自然科学版），1990；6 (2)：11—18.

[2] R_+^2 上的正则函数和 L－S 测度的分解，福建师范大学学报（自然科学版），1989；5（3）.

陈宗洵

[1] 一个有界而发散的二指标鞅，福建师范大学学报（自然科学版），1982；（2）：35—39.

陈雄

[1] 关于 N 参数 d 维 Ornstein－Uhlenbeck 过程样本轨道性质的注记，中国科学 A 辑，1990；353—359.

[2] 关于 N 参数 d 维 Ornstein－Uhlenbeck 过程样本轨道的一个性质. 应用概率统计，1991；7(1)：9—13.

[3] 二参数 Ornstein－Uhlenbeck 过程图集及象集的 Hausdorff 维数. 数学学报，1989；32：433—438.

[4] 两指标 Poisson 型随机微分方程解的轨道唯一性. 科学通报，1988；（9）：649—652.

严士健

[1] 无穷粒子马尔可夫过程引论，北京师范大学出版社，北京，1989.

张润楚

[1] 广义 Brownian Sheet 和广义 OUP_2 的马氏性，中国科学，1985；5：389—398.

张润楚与庄兴无

[1] 二参数 Harness 和对 Brown 单的表征，科学通报，1988；（22）：1694—1697.

张春生

[1] On the recurrent of Ornstein－Uhlenbeck processes. 东北数学，1992；8(2)：208—214.

[2] 关于二参数时间变换，数学物理学报，1987；7(4)：403—410.

张新生

[1] N 参数 Ornstein－Uhlenbeck 过程的点常返性. 数学学报, 1994; 37 (4): 440—443.

杨向群

[1] 可列马尔科夫过程构造论, 湖南科技出版社, 长沙, 1986. 第二版.

[2] The Construction Theory of Denumerable Markov Processes, John Wiley & Sons, 1990.

[3] Markov properties for two－parameter stochastic processes with independent increaments and existence of its family of three－point transition functions, 数学研究纪事, 1993; 26(2): 1 5.

[4] 两个状态的两参数宽过去马氏过程, 科学通报, 1996; No. 2. 196.

杨向群与李应求

[1] 两参数马氏过程的若干新进展（Ⅰ）, 湘潭大学自然科学学报, 1991; 13 (2): 1—15.

[2] 两参数马氏过程的若干新进展（Ⅱ）, 湘潭大学自然科学学报, 1991; 13 (4): 44—52.

杨向群与郭学鹏

[1] 两参数广义 Poisson 过程, 数学学报, 1995; 38(2): 207—216.

[2] 广义 Poisson 单的跳线和样本函数的结构, 湖南师范大学自然科学学报, 1995; 18(1): 84—86.

[3] 广义 Poisson 单, 湖南师范大学自然科学学报, 1994; 17(4): 88—90.

杨向群与谢语权

[1] 马氏链的转移矩阵的补值问题, 益阳师专学报（自然科学版）, 1994; 11 (5): 1—4.

杨向群与向红锋

[1] Two-parameter single-point Markov processes, 湖南师范大学自然科学学报, 1994; 17(1): 1—7.

[2] 两参数 MM 类过程的马氏性, 科学通报, 1994; 39(11): 972—973.

[3] 一类两参数马氏过程的构造——在马氏过程上生长马氏过程，数学年刊A辑，1995；16A（6）：784—790.

杨向群与刘良欣

[1] 两参数随机游动，数学物理学报，1995；15（4）：361—367.

杨振明

[1] 平面上的Levy—Markov性，应用概率统计，1986；2(2)：177—182.

[2] 二参数Markov过程的转移概率．南开大学自然科学学报，1989；(2)：20～23.

杨新建

[1] 最小分裂σ域的存在唯一性，湖南师范大学自然科学学报，1995；18（1）：6—7.

[2] 跳过程的Malliavin分析，数学年刊，1993，14A：(3)：334—340.

罗首军

[1] 关于两参数Markov过程的强芽Markov性，科学通报，1986；（23）：1772—1775.

[2] Two－parameter homogeneous Markovian process，数学物理学报（英文），1988；8(3)：315－322.

[3] On the germ－Markov property of the generalized N－parameter Ornstein－vhlenbeck process，Chinese Ann. of Math. series B，1989；10（1）：65－73.

[4] 广义Levy单及某些相关随机场的Markov性，中国科学，1992；A（10）：1035－1043.

[5] 二参数Ornstein－uhlenbeck过程最大值分布估计．数学学报，1988；31（6）：721—727.

周占功

[1] 一类两参数指数鞅，湘潭大学自然科学学报，1990；12(3)：8—13.

周健伟

[1] 两指标过程的强马尔可夫性，应用概率统计，1986；2(4)：302—306.
[2] 两指标规则马氏过程，数学学报，1989；32 (2)：200—208.
[3] 两指标强马尔可夫过程，华东师范大学自然科学学报，1989；(4)：7—11.
[4] The two—parameter regular Markov processes and processes with independent increaments，应用概率统计，1992；8(3)：281—288.
[5] 停线和可选增加路径的增过程特征，工程数学学报，1985；2 (1)：112—115.

周健伟与周晓文
[1] 关于平面上宽过去马氏性的注记，科学通报，1991；(9)：650—652.
[2] Sample function properties of two—parameter Markov processes，stoch. proc. appl.，1993；47：37—51.
[3] When will be the sample paths be step function for two—parameter stochastic processes，statistics & probability letter，1993；18：147—151.

周晓文
[1] 两指标马氏过程的轨道性质，数学物理学报，1992；12：104—105.

林正炎
[1] 两参数 Wiener 过程的增量有多大，中国科学 A 辑，1984；(12)：1065—1073.

林正炎和陆传荣
[1] 强极限定理，科学出版社，北京，1992.

林燕夏
[1] Using stopping point to describe stopping line，数学研究与评论，1985，5 (3)：87—90.

潘契夫. S.
[1] 随机函数和湍流，1976.

胡迪鹤

[1] 马氏场的遍历性及耦合，数学学报，1992；35（4）：505—515.

[2]Hilbert 空间上的各向同性的马氏场，数学杂志，1983；(3)；35—52，145—156

胡豫濮

[1] 二指标 Poisson 过程停线的马氏性. 数理统计与应用概率，1990；4（1）：87—96.

侯振挺等

[1] 马尔可夫过程的 Q 矩阵问题，湖南科技出版社，长沙，1994.

贺湘民

[1]两参数 Feller 过程和随机微分方程解的马氏性，湘潭大学自然科学学报，1991；13(2)：33—40.

郭军义

[1] 两参数马氏链的标准三点转移函数，河北师范大学学报（自然科学版），1989；21(2)：69—73.

[2] 两参数马氏链的状态分解定理的应用，河北师范大学学报（自然科学版），1991；(2)：11—14.

郭军义与杨向群

[1] 两参数马氏链的二点转移函数族及其四个偏微分方程组，中国科学 A 辑，1992；(1)：40—50.

赵觐周与贺兴时

[1]两参数 Poisson 过程的鞅刻画，陕西师范大学学报（自然科学版），1989；17（3）：14—16.

聂赞坎

[1] 双指标 Ito 型随机微分方程解的轨道唯一性，数学学报，1987；30（2）：179—186.

[2] 以 $[0, 1]^n$ 为指标集的半鞅的 Ito 公式，数学学报，1988；31(3)：381—395.
[3] 关于 n 维参数强鞅的随机积分，数学年刊，1982；6 (3)：753—764.

高付清
[1] H 值多参数扩散过程的大偏差与泛函重对数律，数学年刊，1994；15 (1)：108—114.

黄长全
[1]关于两参数马氏过程的一个反例，科学通报，1988；33(14)：1050—1052.
[2] 一类两参随机过程的马氏性，吉首大学学报（自然科学版），1989；2 (2)：1—4.

曾黨烈与方世祖
[1] 二参数随机事件流的研究，广西大学学报（自然科学版），1992；17 (3)：7—14.

谢语权
[1] 两参数随机过程的各种马氏性及宽将来马氏性的充要条件的证明，湘潭大学自然科学学报，1988；10(2)：15—21.
[2] 两参数马氏链的转移函数，湘潭大学 88 届研究生硕士论文，1988.

熊大国
[1] 多指标随机过程的均方微积分，北京工业学院学报，1987；7 (4)：115—126.
[2] 随机过程理论与应用，国防工业出版社，北京，1991.

廖昭懋
[1] n-参数 Ornstein—Uhlenbeck 过程，北京师范大学学报（自然科学版），1989；(1)：13—19.

谭光兴
[1]关于两指标半鞅的一般性定义，陕西师范大学学报（自然科学版），1989；

17 (3)：17－19.

薛行雄

[1] 二参数Ornstein－Uhlenbeck过程奇点的蔓延，应用概率统计，1985；1 (1)：53－58.

戴永隆与周健伟

[1]两指标和单指标马氏过程的关系，应用概率统计，1987；3(3)：260—263.

戴永隆

[1] 马尔科夫振动问题，广东科技出版社，广州，1993.

Adler, R. J.

[1] The Geometry of Random Field, Wiley. New York, 1981.

[2] A Hölder condition for the local time of the Brownian sheet, Indiana Univ. Math. J., 1980; 29: 793—798.

[3] The uniform dimension of the level sets of a Brownian sheet. Ann. Prob., 1978; 6: 509—515.

Adler, R. J., Monrad, D., Scissors, R. H. & Wilson, R.

[1]Representations, decompositins and sample function continuity of random fields with independent increaments, Stoch. Proc., Appl. 1983; 15: 3—30.

Bakry D.

[1] Theoremes de projection et section pour les processus a deux indices, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1981; 55: 55—71.

[2] Sur la regularite des trajectoires des martingales a deux indices, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1979; 50: 149—157.

Boss, F.

[1] Probability estimates for multiparameter Brownian processes. Ann. probab., 1988; (1):

Cabana, E. M.

[1]On the transition density of a multidimensional parameter Wiener process with one barrier, J. Appl. Prob., 1984; 21: 197—200,

Cabana, E. M. & Wschebor, M.

[1] The two—parameter Brownian bridge: Kolmogorov inequalities and upper bounds for the distribution of the maximum. Ann, Prob., 1982; 10: 289—302.

Cairoli, M. R.

[1] Une classe de processus de Markov, C. R. Acad. Sc, Paris, Ser. A, 1971; 273: 1071--1074.

Cairoli, M. R. & Walsh, J. B.

[1] Stochastic integrals in the plane, Acta Math, 1975; 134: 111—183.

Chentsov, N. N.

[1]Wiener random field depending on several parameters,Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 1956; 106: 607—609.

Daughtry, J. & Dearden, B.

[1] A test for the existence of Gohberg—Krein representations in terms of multiparameter Wiener processes, J. Funct. Anal., 1985; 64: 403—411.

Davydov, Y.

[1] Local time for multiparameter stochastic processes (in Russian), Teor. Veroj. Prim., 1978; 23: 594—605.

Dozzi, M.

[1]Stochastic processes with a multidimensional parameter, Longman Scientific & Technical, 1989;

[2] On the decomposition and integration of two—parameter stochastic pro-

cesses. Lecture Notes in Math, 1981; 863: 162—171.

[3] Two-parameter Harnesses and the Wiener process. Z. Wahr. Verw. Geb. 1981; 56: 507—514.

[4] Strong solutions of stochastic differential equation for multi—parameter processes, Stochastics, 1986; 17(2): 19—41.

Dubins, L. & Pitman, J. W.

[1] A divergent, two—parameter, bounded martingale, Proc. Amer. Math. Soc., 1980; 78(3): 414—417.

Ehm, W.

[1] Sample function properties of multi—parameter stable processes, Z. Wahrsch. verw. Gebiete, 1981; 56: 195—228.

Follmer, H.

[1] Almost sure convergence of multiparameter martingales for Markov random fields, Ann. Prob., 1984; 12(1): 133—140.

Fouque, J. P.

[1] The past of a stopping point and stopping for two—parameter processes, J. Multi. Anal., 1983; 13: 561—577.

Frangos, N. E. & Imkeller, P.

[1] Quadiatic variation for a class of $L\log^+L$ bounded two—parameter martingales, Ann. Probab. 1987; 15: 1097—1111.

Garsia, A.

[1] Continuity properties of Gaussian precesses with multidimensional time parameter, Proc. Sixth, Berkeley, Symp. Math. Prob., 1972; (2): 369—374.

Geman, D., Horowitz, J. & Rosen, J.

[1] A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane.

Ann. probab., 1984: 12(1): 86—107.

Goodman, V.

[1]Distribution estimates for functionals of the two—parameter Wiener process. Ann. Prob., 1976; 4: 977—982.

Hajek B.

[1] Stochastic equations of hyperbolic type and a two—parameter stratonovich calculus, Ann. Prob., 1982; 10(2): 451—463.

Ikeda, N. & Watanabe, S.

[1]Stochastic differential equations and diffusion processes, North—Holland Publishing Company, 1981.

Imkeller, P.

[1] Two—parameter martingales and their quardratic variation, Lecture Notes in Math. 1988; 1308.

[2] Local times of continuous N—parameter strong martingales, J. Multi. Anal. 1986; 19: 348—365.

[3] Ito's formula for continuous (N, d)—processes, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1984; 65: 535—562.

[4] Stochastic analysis and local times for (N, d)—Wiener process. Ann, Inst. H. Poincare, 1984; 20: 75—101.

[5] A stochastic calculus for continuous N parameter strong martingales. Stoch. Proc. Appl., 1985; 20: 1—40.

Kallianpur, G., Miamee, A. G. & Niemi

[1] On the prediction theory of two—parameter stationary random fields, J. Mult. Anal. 1990; 32: 120—149.

Knight F.

[1] A remark on Markovian germ field, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1970; 15: 291—296.

Korezlioglu, H. & Lefort, P.

[1]Une propriete Markoviene pour les processus a deux indices,C. R. Acad. Sc, Paris, Ser. A, 1980; 290 (24): 555—558.

Korezlioglu, H., Lefort, P. & Mazziotto, G.

[1] Une propriete Markoviene et diffusions associees. Processus aleatoires a deux indices. Lecture Notes in Math., 1981; 863: 245—274.

Korezlioglu, H., Mazziotto, G.

[1] Sur des diffusions multidirectionnelles, C. R. Acad. Sc. Paris, 290, ser. A. 657—660, 1980.

Mazziotto, G.

[1] Two—parameter Hunt processes and a potential theory, Ann. Prob., 1988; 16(2): 600—619.

[2]Two parameter optimal stopping and bi—Markov processes,Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1985; 69: 99—135.

[3]Optimal stopping of bi—Marnov processes and Hamonic functions,C. R. Acad. sc. paris, 295, 173—176, 1982.

Mazziotto, G. & Merzbach E.

[1] Regularity and decomposition of two—parameter supermartingales. J. Multi. Anal., 1985; 38—55.

Mazziotto, G. & Szpirglas, J.

[1] Sur les discontinuites d'un processus cadlag a deux indices, Processus aleatoires a deux indices. Lecture Notes in Math. 1981; 863: 84—90.

Mckean, H. P.,

[1] Brownian motion with a several—dimensional time parameter, Theory Prob. Appl., 1963; 8: 335—354.

Merzbach, E. & Nualart, D.

[1] Markov properties for point processes on the plane, Ann. Prob., 1990; 18 (1): 342—358.

[2]A Martingale approach to point processes in the plane, Ann. Prob., 1988; 16: 265—274.

[3]A characterization of the spatial Poisson process and changing time, Ann. Prob., 1986; 14 (4): 1380—1390.

Merzbach, E. & Zakai, M.

[1]Predictable and dual predictable projections of two—parameter stochastic processes, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1980; 53: 263—270.

[2] Stopping a two—parameter weak martingale, Prob. Theory Related Fields, 1987; 76: 499—507.

Meyer, P. A.

[1] Theorie elementaire des processus a deux indices. Processus aleatoires a deux indices. Lecture in Math. 1981; 863: 1—39.

Millet, A.

[1] On convergence and regularity of two—parameter l—submartingales, Ann. Inst. H. Poincare, 1983; 19: 25—42.

Millet, A. & Sucheston, L.

[1] On regularity of multiparameter amart and martingales, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1981; 56: 21—45.

Nualart, D.

[1] On the quadratic variation of two—parameter continuous martingales, Ann. Prob. 1984; 12(2): 445—457.

[2] Two—parameter diffusion processes and martingales, Stoch. Proc. Appl., 1983; 15: 31—57.

Nualart, D. & Sanz, M.

[1] The conditional independence property in filtrations associated to stopping lines, Lecture Notes in Math., 1981; 861: 202—210.

[2]A Markov property for two—parameter Gaussian processes, Stochastica, 1979; (3): 1—16.

[3] Changing time for two—parameter strong martingales. Ann. Inst. H. Poincare, Sect. B, 1981; 17: 147—163.

Orey, S. & Pruitt, W. E.

[1]Sample functions of the N—parameter Wiener processes, Ann. probab., 1973; (1): 138—163.

Park, W. J.

[1] A multi—parameter Gaussian process, Ann. Math. Stat., 1970; 41 (5): 1582—1595.

Pitt, L. D.

[1]A Markov property for two—parameter Gaussian processes with a multidimensional parameter, Arch. Rational Mech. Anal., 1971; 43; 367—391.

Ravaska, T.

[1] On analytical methods for incomplete Markov random field, Adv. Appl. Prob. 1983; 15: 99—112.

Revesz, P.

[1] On the increments of the local time of a Wiener sheet, J. multi. analy., 1985; 16: 277—289.

Rosen, J.

[1] Self—intersection of random field, Ann. Probab., 1984; 12: 108—119.

Rozanov, Y. A.

[1] Markov random field. Springer—verlag, 1982.

Sirao, T.

[1] On the continuity of Brownian motion with a multidimensional parameter, Nagoya Math. J., 1960; 16: 135—156.

Soltani, A. R.

[1] Extrapolation and moving average representation for stationary random fields and beurling's theorem, Ann. Prob., 1984; 12 (1): 120—132.

Spitzer, F.

[1] The principle of random walks, Spring--Verlag, 1990.

Stoica, L.

[1] On two—parameter semimartingales, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1978; 45: 257—268.

Strait, P. T.

[1] Level crossing probabilities for a multi—parameter Brownian process, Pacific J. Math., 1976; 65 (1); 223—232.

Sucheston, L.

[1] On one—parameter proofs of almost sure convergence of multiparameter processes, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1982; 63: 43—50.

Tran, L. T.

[1] Local maxima of the sample functions of the two—parameter Wiener process. Proceed Amer. Math. Soc., 1976; 58: 250—253.

[2] On a problem posed by Orey and Pruitt related to the range of the N—Parameter Wiener process in R^d, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1976; 37: 27—33.

Vares, M. E.

[1] Some results on local growth of Two—parameter Levy processes, Bol.

Soc. Bras. Math., 1981; 12 (2): 33—55.

Walsh, J. B.

[1] Martingales with a multidimensional parameter and stochastic integrals in the plane, Lecture Notes in Math. 1986; 1215: 329—491.

[2] The local time of Brownian sheet, Asterisque, 1978; 52—53: 47—67.

[3] Propagation of singularities in the Brownian sheet. Ann. Prob. 1982; 10: 279—288.

[4] Convergence and regularity of multiparameter strong martingales, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1979; 46: 177—192.

Wichura, M. J.

[1] Some strassen type laws of the iterated logarithm for multiparameter stochastic processes with independent increaments, Ann. probab., 1973; (1): 180—182.

[2] Inequalities with applications to the weak convergence of random processes with multi—dimensional time parameter, Ann. Math. stat., 1969; 40: 681—687.

Wong, E. & Zakai, M.

[1] Weak martingales and stochastic integrals in the plane, Ann. probab. 1976; 4 (4): 570—586.

[2] Differentiation formulas for stochastic integrals in the plane. Stoch. Proc. Appl., 1978; 6: 339—349.

[3] Martingales and stochastic integrals for processes with a multidimensional parameter, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1974; 29: 109—122.

[4] An extension of stochastic integrals in the plane, Ann. prob., 1977; 5: 770—778.

[5] The sample function continuity of stochastic integrals in the plane, Ann. Prob., 1977; 5: 1024—1027.

[6] An intrinsic calculus for weak martingales in the plane. Memorandom No. UCB/ERL M78/20. Univ. of California at Berkeley, 1978.

[7] Martingales and stochastic integrals for processes with a multi—dimen-

sionalparameter, Z. Wahrsch. verw. Gebiete, 19/4; 29: 109—122.
[8] Markov processes on the plane, Stochastics, 1985; 15: 311—333.

Yeh, J.
[1] Existence of strong solutions for stochastic differential equations in the plane, Pacific J. Math. 1981; 97: 217—247.

Yor, M.
[1]Representation des Martingales de carre integrable relative aux processus de Wiener et de Poisson a n parametres, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1976; 35: 121 -129.

Zakai, M.
[1] Some class of two—parameter martingales, Ann. Prob., 1981; 9 (2): 255—265.

Zimmerman, F.
[1] Some sample function properties of the two—parameter Gaussian process. Ann. Math. Statist, 1972; 43 (4): 1235—1246.

Zinchenko, N. M.
[1]Local growth of random fields with independent increments,Siam Journal on Theory of Probab. and its Appl., 1979.

索　　引

（§1.3表示章节号，1.1表示定义、定理的编号）

1　画

3　画

4 画

5 画

6 画

7 画

8 画

9 画

10 画

11 画

12 画

14 画